MODELLI E METODI MATEMATICI I
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 23 NOVEMBRE 2004

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Data l'equazione differenziale

$$y' = y^2\, e^y$$

disegnare un grafico qualitativo delle linee integrali, precisandone in particolare l'insieme di definizione, la regolarità, gli eventuali punti stazionari, la presenza di asintoti orizzontali.

2) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{xy}{1 - xy}$$

disegnare un grafico qualitativo delle linee integrali, precisandone in particolare l'insieme di definizione, la regolarità, gli eventuali punti stazionari, i punti di flesso.

3) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 + 9y}{9} \sin x,$$

determinare le due linee integrali passanti rispettivamente per i punti $A(0, 4)$ e $B(0, 2)$.

4) Si considerino i due vettori

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} x - 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} 9x - 1 \\ 5x - 3 \end{bmatrix}.$$

a) Verificare che i due vettori sono linearmente indipendenti.
b) Scrivere la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo 2×2 che ammette $\underline{z}_1$ e $\underline{z}_2$ come integrali particolari.
c) Scrivere l'integrale generale del sistema lineare omogeneo.
d) Verificare il Teorema di Liouville utilizzando $x_0 = 0$.

5) Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbf{A}\underline{z} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{b} \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} x^7 \\ x^4 \end{bmatrix}.$$

7) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare

$$y'' - 5y' + 4y = \frac{e^{5x}}{e^{2x} - 1}.$$

8) Utilizzando il Teorema della convergenza dominata, calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{3x} \arctan\left(\frac{4x}{n}\right) \frac{1}{16 + x^2}\, dx.$$

9) Si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 - x^2)}{n^2} \chi_{[-n,n]}(x), \qquad n \geq 1.$$

a) Verificare che la successione converge a $f = 0$ in $C^0(\mathbf{R})$ dotato della norma dell'estremo superiore.

b) Verificare che la successione converge a $f = 0$ in $L^1(\mathbf{R})$ dotato dell'usuale norma integrale.

10) Si consideri lo spazio $L^2(0,1)$ che è di Hilbert con il prodotto interno

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Verificare che i tre vettori

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \ln x + 1 \quad v_2 = \ln^2 x + 4\ln x + 2$$

costituiscono un sistema ortonormale in $L^2(0,1)$.