

MODELLI E METODI MATEMATICI I  
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 23 NOVEMBRE 2006

COGNOME e NOME

NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = y \ln(y + 4)$$

Tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali soluzioni dell'equazione, con particolare attenzione alla regolarità e all'insieme di definizione.

2) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y' = \frac{2x + 3y}{3x - 4y}.$$

3) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = \sin(5y) \cos(5y)$$

e determinare, poi, le soluzioni dei Problema di Cauchy  $y(0) = \frac{1}{20}$  e  $y(0) = \frac{\pi}{5}$ .

4) Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa

$$y''' + y'' - y' - y = 3e^{-x}.$$

5) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{b} \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ x \end{bmatrix}.$$

6) Si consideri la successione  $\{f_n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , definita da

$$f_n(x) = \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \ln\left(1 + \frac{1}{n} - x\right).$$

- Verificare che  $\{f_n\} \subset C^0([0, 1])$  e che  $\{f_n\} \subset L^1(0, 1)$ ;
- calcolare il limite puntuale della successione;
- studiare la convergenza della successione in  $C^0([0, 1])$  dotato della norma dell'estremo superiore e in  $L^1(0, 1)$  dotato dell'usuale norma integrale.

7) Si consideri la successione  $\{f_n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , definita da

$$f_n(x) = n^\alpha \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \ln\left(1 + \frac{1}{n} - x\right), \quad \alpha > 0.$$

Studiare la convergenza della successione in in  $L^1(0,1)$  al variare di  $\alpha$  nell'intervallo  $]0, +\infty[$ .

8) Si consideri lo spazio

$$H^1(-\pi, \pi) = \{f \in L^2(-\pi, \pi) \text{ t.c. } f' \in L^2(-\pi, \pi)\},$$

che è di Hilbert con il prodotto interno

$$(f, g)_{H^1} = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x)\overline{g'(x)} dx.$$

Verificare che i tre vettori

$$v_1 = 3, \quad v_2 = \sin 3x, \quad v_3 = \cos 4x$$

sono mutualmente ortogonali in  $H^1(-\pi, \pi)$ .