MODELLI E METODI MATEMATICI I
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 24 NOVEMBRE 2005

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \tan(xy) - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali passanti per i punti $A(1, \frac{\pi}{6})$, $B(1, \frac{7}{6}\pi)$, $C(-1, \frac{5}{6}\pi)$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = 2\arctan y - x.$$

Verificare che $\forall\, (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, la soluzione del corrispondente Problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbf{R}$ e di classe C^∞.
Facoltativo: Disegnare un grafico qualitativo delle linee integrali.

3) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 1 - 9\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}.$$

Determinare le due linee integrali passanti rispettivamente per i punti $A(1, 3)$ e $B(1, 6)$.

4) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin y}{\cos y}$$

e determinare, poi, le soluzioni del Problema di Cauchy $y(0) = 2$.

5) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x^2y'' + 6xy' + 4y = \sin x.$$

6) Risolvere il Problema ai limiti omogeneo

$$\begin{cases} z'' + 4\lambda z = 0 \\ z(0) + z'(0) = 0 \qquad \lambda \in \mathbf{R}. \\ z(1) = 0 \end{cases}$$

7) Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbf{A}\underline{z} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{b} \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ x \end{bmatrix}.$$

9) Si consideri la successione $\{f_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, definita da

$$f_n(x) = 2x\, e^{-3x/n}.$$

a) Verificare che $\{f_n\} \subset C^0([0,1])$ e che $\{f_n\} \subset L^1(0,1)$;
b) calcolare il limite puntuale della successione;
c) studiare la convergenza della successione in $C^0([0,1])$ dotato della norma dell'estremo superiore e in $L^1(0,1)$ dotato dell'usuale norma integrale.

10) Si consideri la successione $\{f_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{x+1}} \chi_{[n^2+n, 4n^2+4n]}(x).$$

a) Verificare che $\{f_n\} \subset L^1(0,+\infty)$;
b) verificare che $\{f_n\} \subset L^\infty(0,+\infty)$, spazio delle funzioni limitate nell'intervallo $(0,+\infty)$;
c) calcolare il limite puntuale della successione;
d) studiare la convergenza della successione in in $L^1(0,+\infty)$ dotato dell'usuale norma integrale;
e) studiare la convergenza della successione in $L^\infty(0,+\infty)$ dotato della norma dell'estremo superiore.

11) Si consideri lo spazio

$$H^1(-\pi,\pi) = \{f \in L^2(-\pi,\pi) \text{ t.c. } f' \in L^2(-\pi,\pi)\},$$

che è di Hilbert con il prodotto interno

$$(f,g)_{H^1} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx.$$

Verificare che i tre vettori

$$v_1 = 3, \quad v_2 = \sin x, \quad v_3 = \cos 2x$$

sono mutualmente ortogonali in $H^1(-\pi, \pi)$.

12) Si consideri lo spazio

$$C^1([0,1]) = \{f \in C^0([0,1]) \text{ t.c. } f' \in C^0([0,1])\}.$$

Dire quali delle seguenti quantità è una norma per $C^1([0,1])$ e quale non lo è:
a) $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$;
b) $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$;
c) $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$;
d) $\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)|\,dx$.