MODELLI E METODI MATEMATICI I
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 24 NOVEMBRE 2008

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Dopo averne studiato esistenza, unicità e regolarità, tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali, soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y\ \exp(\frac{1}{y^2-1}).$$

2) Dopo averne studiato esistenza, unicità e regolarità, tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali, soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \arctan\left[\frac{16}{\pi^2}(x^2+y^2)-1\right].$$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \sinh\frac{y}{x} + \frac{y}{x};$$

determinare, poi, l'equazione della linea integrale passante per il punto $A(1,1)$.

4) Si consideri il sistema differenziale omogeneo $\underline{z}' = \mathbf{A}\underline{z}$, dove $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Determinare l'integrale generale e l'integrale particolare, soluzione di $\underline{z}'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5) Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, determinare le soluzioni del Problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' - 2y' + (1+\lambda^2)y = \lambda^2\sin x - 2\cos x, \\ y(0) - y'(0) = -1, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

6) Si consideri la successione $\{f_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, definita da

$$f_n(x) = x^n\,(1-x)^n.$$

a) Verificare che $\{f_n\} \subset C^0([0,1])$.
b) Verificare che $\{f_n\} \subset L^1(0,1)$.
c) Studiare la convergenza della successione in $C^0([0,1])$, dotato dell'usuale norma dell'estremo superiore.
d) Studiare la convergenza della successione in $L^1(0,1)$, dotato dell'usuale norma integrale.
e) [**Facoltativo**] Come cambiano le cose se, al posto di $\{f_n\}$, si considera la successione $\{g_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, $g_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, definita da

$$g_n(x) = 4^n\,x^n\,(1-x)^n?$$