M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 1 febbraio 2007		

1. Data l'equazione differenziale alle derivate parziali del I ordine

$$y\, u_x + x\, u_y = \gamma u, \quad \gamma \text{ un parametro reale positivo,}$$

determinare in forma parametrica

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t),$$

la superficie integrale passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = 0, \qquad h(s) = \ln(1+s^2) \qquad s > 0,$$

dopo aver verificato che le condizioni di risolubilità sono soddisfatte. Scritta la soluzione in forma cartesiana $u = u(x,y)$ nel dominio piano $|x| > |y|$, verificare che tale soluzione è discontinua in corrispondenza della retta $y = x$ e continua, ma non di classe C^1 , in corrispondenza della retta $y = -x$; spiegare tale comportamento in termini di linee caratteristiche.

Fino a punti 8

---

2. Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < 2\pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 4\pi^2 - x^2 & x \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Nota: è importante osservare che nella variabile x si ha a che fare con un problema di Sturm–Liouville regolare.

Fino a punti 8

---

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ con $n \geq 1$ definita da

$$f_n(x) = |\cos x|^{\frac{1}{n}}\, e^{-n|x|}.$$

a) Studiare il limite puntuale della successione;
b) verificare che $\{f_n\} \subset L^1(\mathbf{R})$;
c) verificare che $\{f_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$;
d) verificare che $\{f_n\} \subset C_b^0(\mathbf{R})$, spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate;
e) studiare la convergenza della successione in $L^1(\mathbf{R})$;
f) studiare la convergenza della successione in $L^2(\mathbf{R})$;
g) studiare la convergenza della successione in $C_b^0(\mathbf{R})$, dotato della norma dell'estremo superiore.

Fino a punti 8

---

4. Tracciare un grafico qualitativo della soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{arctg}(xy), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dopo averne determinato le principali proprietà (esistenza e unicità in piccolo o in grande, regolarità della soluzione, crescenza, convessità).

Fino a punti 8

Tempo: 2.30 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale