M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 1 febbraio 2008		

1. Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(\pi - x) & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Fino a punti 8

---

2. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(\mathbf{R})$, dotato dell'usuale prodotto interno, e il sottospazio V generato dai tre vettori linearmente indipendenti

$$u_o = \exp(-\frac{x^2}{2}), \qquad u_1 = x \ \exp(-\frac{x^2}{2}), \qquad u_2 = x^2 \ \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

Ricordando che $\int_{\mathbf{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$, determinare la proiezione ortogonale su V della funzione $f = x \exp(-x^2)$.

Fino a punti 8

---

3. Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbf{A}\underline{z}, \qquad \text{dove } \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinare poi l'integrale particolare soluzione del problema di Cauchy $\underline{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Fino a punti 8

---

4. Tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali soluzioni dei due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + \cos y \\ y(1) = \pi \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = 1 + \cos y \\ y(1) = \frac{\pi}{3} \end{cases},$$

giustificando accuratamente tutti i risultati. Determinare quindi l'espressione esplicita delle due soluzioni.

Fino a punti 8

Tempo: 2.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale