M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 10 luglio 2009		

1. Data l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x^2\, u_x - xy\, u_y = xy - x^2,$$

determinare la superficie integrale di equazione $z = u(x,y)$ passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = s, \qquad h(s) = s$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

Fino a punti 8

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = 1 + \sin^2 y.$$

Dopo aver verificato che per ogni $(x_o, y_o) \in \mathbf{R}^2$ si può applicare il Teorema di esistenza ed unicità in grande, tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali, precisandone la regolarità.

Fino a punti 8

---

3. Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} + \underline{b}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

Fino a punti 8

---

4. Lo spazio $H^1(-1,1) = \{f \in L^2(-1,1) : \; f' \in L^2(-1,1)\}$ è di Hilbert munito del prodotto interno

$$(f,g)_{H^1} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\, dx.$$

Sia $Z \subset H^1(-1,1)$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = 3, \qquad v_2 = 2x, \qquad v_3 = 4x^2.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali ed approssimare $f(x) = e^x$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

Fino a punti 8

Tempo: 2.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale