M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 5 febbraio 2004		

1. Data l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x^2\, u_x - y^2\, u_y = y^2 - x^2,$$

determinare la superficie integrale di equazione $z = u(x,y)$ passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = s, \qquad h(s) = s$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

Fino a punti 8

---

2. Si consideri l'equazione

$$x^3 y\, u_{xx} - 4xy^3\, u_{yy} = 0,$$

1) Classificarla e determinarne le caratteristiche.
2) Verificare che per $x > 0$ la retta $y = \frac{1}{4}$ può essere assunta come linea portante i dati. Determinare inoltre $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della u in $P(x, \frac{1}{4})$ con $x > \bar{x}$, non cambi il valore di $u(1,1)$.
3) Ridurre l'equazione a forma canonica.

Fino a punti 8

---

3. Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare poi l'integrale particolare soluzione del problema di Cauchy

$$\underline{z}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Fino a punti 8

---

4. Lo spazio $H^1(-1,1) = \{f \in L^2(-1,1) : \ f' \in L^2(-1,1)\}$ è di Hilbert munito del prodotto interno

$$(f,g)_{H^1} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\, dx.$$

Sia $Z \subset H^1(-1,1)$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = x, \qquad v_3 = x^2.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali ed approssimare $f(x) = e^x$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

Fino a punti 8

Tempo: 3.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale