MODELLI E METODI MATEMATICI I

PRIMA PROVA IN ITINERE del 18 novembre 2003

1) Dopo aver verificato che le funzioni $z_1 = e^x$ e $z_2 = x$ sono linearmente indipendenti, determinare l'espressione dell'equazione differenziale lineare omogenea che li ammette come integrali particolari ed indicare un intervallo in cui vale il Teorema di esistenza ed unicità in grande. Era possibile individuarlo a priori, senza calcolare esplicitamente i coefficienti $a_i(x)$ dell'equazione?

Soluzione. È evidente che si tratta di due funzioni linearmente indipendenti. Inoltre

$$z_1 = e^x \;\Rightarrow\; \underline{z}_1 = \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix}, \qquad z_2 = e^x \;\Rightarrow\; \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{bmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalla relazione $\mathbb{Z}' = \mathbb{A}\mathbb{Z}$ segue che

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}'\mathbb{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} e^x & 1 \\ e^x & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{e^x(1-x)} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -e^x & e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x-1} & \frac{x}{x-1} \end{bmatrix}.$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari è noto che, posto

$$a_0 z'' + a_1 z' + a_2 z = 0,$$

per la matrice dei coefficienti del sistema equivalente risulta

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}.$$

Dal confronto con la nostra matrice $\mathbb{A}$ è immediato concludere che $a_0 = x - 1$, $a_1 = -x$, $a_2 = 1$. L'equazione cercata è dunque

$$(x-1)z'' - xz' + z = 0.$$

Dal Teorema di esistenza ed unicità in grande, risulta che esiste unica la soluzione per ogni problema di Cauchy assegnato nell'intervallo I in cui i coefficienti a_i sono continui e $a_0 \neq 0$. Dai risultati precedenti è evidente che si può assumere un qualunque $I \subset]-\infty, 1[$ o $I \subset]1, +\infty[$. Era possibile prevedere questo risultato a priori perchè $W(x) = e^x(1-x)$ e dal Teorema di Liouville è immediato concludere che occorre considerare $]-\infty, 1[$ o $]1, +\infty[$.

2) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Risolviamo dapprima il sistema omogeneo associato $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$. Gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono $\lambda_{1,2} = \pm i$, complessi coniugati. In corrispondenza di λ_1 l'autovettore è

$$\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}.$$

Sappiamo dalla teoria che due vettori soluzioni linearmente indipendenti sono dati da $\underline{z}_1 = Re(\underline{h}_1 e^{\lambda_1 x})$, $\underline{z}_2 = Im(\underline{h}_1 e^{\lambda_1 x})$. Da calcoli precedenti concludiamo che

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x + \cos x \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin x \\ \sin x - \cos x \end{bmatrix}.$$

Per determinare l'espressione dell'integrale generale ci occorre ora un integrale particolare del sistema completo, che determiniamo con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie. Abbiamo

$$\underline{y}_P = \mathbb{Z} \int^x \mathbb{Z}^{-1}(t)\, \underline{b}(t)\, dt =$$

$$= - \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x + \cos x & \sin x - \cos x \end{bmatrix} \int^x \begin{bmatrix} \sin t - \cos t & -\sin t \\ -\cos t - \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{bmatrix} dt =$$

$$= - \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x + \cos x & \sin x - \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x - \ln|\cos x| \\ -x + \ln|\cos x| \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} -x\cos x - \cos x \ln|\cos x| - x \sin x + \sin x \ln|\cos x| \\ -2x \sin x - 2\cos x \ln|\cos x| \end{bmatrix}.$$

In definitiva

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x + \cos x & \sin x - \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} x\cos x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x - \sin x \ln|\cos x| \\ 2x \sin x + 2\cos x \ln|\cos x| \end{bmatrix}.$$

3) Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Corrispondentemente gli autovettori sono

$$\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Concludiamo, dunque, che l'integrale generale è

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2e^x & e^{2x} \\ 0 & 2e^x & 2e^{2x} \\ 2 & e^x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

4) Determinare la linea integrale soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = 2e^x \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Facilmente si trova

$$y = C_1 + C_2\, e^{2x} - 2\, e^x.$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} C_1 + e^2\, C_2 = 2e - 1 \\ 2e^2 C_2 = 2e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = e - 1,\ C_2 = \frac{1}{e}.$$

5) Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa

$$y'' + 4y = 2\tan x.$$

Soluzione. Facilmente si trova

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + y_P.$$

Determiniamo l'espressione di y_P con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie. Abbiamo

$$y_P = \int^x \frac{\begin{vmatrix} \sin 2t & \cos 2t \\ \sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2t & \cos 2t \\ 2\cos 2t & -2\sin 2t \end{vmatrix}} 2\frac{\sin t}{\cos t}\, dt =$$

$$= \sin 2x \int^x (2\cos t \sin t - \frac{\sin t}{\cos t})\, dt - \cos 2x \int^x 2\sin^2 t\, dt =$$

$$= \sin 2x[\sin^2 x + \ln|\cos x|] - \cos 2x[x - \frac{1}{2}\sin 2x].$$

6) Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(0, +\infty)$ e sia $Z \subset H$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = e^{-x/2}, \qquad v_2 = x\, e^{-x/2}, \qquad v_3 = x^2\, e^{-x/2}, \qquad v_4 = (x^2 - x)\, e^{-x/2}.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali ed approssimare $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x}$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

Soluzione. Possiamo eliminare v_4, perchè combinazione lineare di v_2 e v_3. Procediamo ora a costruire una base di Z utilizzando il metodo di ortonormalizzazione di Gram - Schmidt. Osserviamo che

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!.$$

Abbiamo

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = e^{-x/2};$$

$$u_2 = \frac{v_2 - (v_2, u_1)u_1}{\|v_2 - (v_2, u_1)u_1\}\|} = (x - 1)\, e^{-x/2};$$

$$u_3 = \frac{v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2}{\|v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2\|} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2}\, e^{-x/2}.$$

L'approssimazione cercata è data dalla proiezione di f su Z. Perciò

$$P_Z f = (f, u_1)u_1 + (f, u_2)u_2 + (f, u_3)u_3 = \frac{1}{2}\, e^{-x/2} - \frac{1}{4}(x - 1)e^{-x/2} + \frac{x^2 - 4x + 2}{16}\, e^{-x/2}.$$

7) Dato lo spazio di Hilbert $H = L^2(-1, 1)$, sia

$$F = \{f \in H : \ f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [-1, 0]\}.$$

Determinare $F^{\perp}$ e data $f(x) = 1 - x^2$, calcolare la proiezione di f su $F^{\perp}$.

Soluzione. È immediato ricavare che

$$F^{\perp} = \{f \in H : \ f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0, 1]\}.$$

Quindi

$$P_{F^{\perp}}(1 - x^2) = (1 - x^2)\chi_{[-1,0]}.$$

8) Verificare che in $L^2(0, 1)$ la successione $\{\phi_m\}$ definita da

$$\phi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}, \qquad \text{dove } [t] \text{ è la parte intera di } t,$$

costituisce un sistema ortonormale.

Soluzione. È evidente che i vettori ϕ_m hanno norma unitaria. Passando alla condizione di ortogonalità, senza perdita di generalità possiamo supporre che $m > n$. Allora

$$\phi_n = \begin{cases} 1 & \dfrac{2k}{2^n} \le x < \dfrac{2k+1}{2^n} \\ -1 & \dfrac{2k+1}{2^n} \le x < \dfrac{2k+2}{2^n} \end{cases} \qquad k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1.$$

e analogamente accade per ϕ_m. In ogni intervallo dove ϕ_n è costante, ϕ_m assume valori alterni in un numero di intervalli pari ad un multiplo di una potenza di due; quindi il prodotto $\phi_n \, \phi_m$, in ogni intervallo in cui ϕ_n è costante, assume valori alterni un numero pari di volte e l'integrale risulta nullo.

9) [**Difficile**] Posto $x = \cos\theta$ verificare che le funzioni

$$\phi_m(x) = \frac{U_m(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \qquad \text{dove } \; U_m(x) = \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}, \; m \ge 1,$$

costituiscono un sistema ortogonale in $L^2(-1, 1)$. Calcolare poi esplicitamente ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e determinare la relativa costante di normalizzazione.

Soluzione. Verifichiamo che $(\phi_n, \phi_m) = 0$ se $m \neq n$. Si tratta di verificare che

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_n(x) U_m(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \, dx = 0.$$

Facendo il cambiamento di variabile

$$x = \cos\theta, \quad dx = -\sin\theta \, d\theta, \quad x = -1 \Rightarrow \theta = \pi, \quad x = 1 \Rightarrow \theta = 0,$$

ci riconduciamo all'integrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta \sin n\theta}{\sin^2\theta} \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin m\theta \sin n\theta}{\sin^2\theta} \, d\theta.$$

Sviluppando $\sin m\theta$ e $\sin n\theta$ in termini di $\sin\theta$ ci riconduciamo ad un polinomio in $\cos\theta$ e $\sin\theta$ che dà sicuramente integrale nullo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Possiamo, dunque, concludere che le funzioni sono effettivamente fra loro ortogonali. Passando al calcolo esplicito abbiamo

$$U_1(x) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^2}};$$

$$U_2(x) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2x \quad \Rightarrow \quad \phi_2(x) = \frac{2x}{\sqrt[4]{1 - x^2}};$$

$$U_3(x) = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 4\cos^2 - 1 = 4x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_3(x) = \frac{4x^2 - 1}{\sqrt[4]{1 - x^2}}.$$

In generale si può osservare che $U_m(x)$ è un polinomio di grado $m - 1$. Tralasciamo il calcolo delle costanti di normalizzazione