CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 2

1) Sia data l'equazione differenziale

$$(1+|x|)z'' + xz' - z = 0.$$

a) Verificare in base alla teoria che tutte le linee integrali sono definite in ogni intervallo $[a,b]$ con $a < b$ arbitrari.

b) Sapendo che x e e^x sono integrali di $(1-x)z''+xz'-z=0$ e che x e e^{-x} sono integrali di $(1+x)z''+xz'-z=0$, scrivere l'integrale generale dell'equazione, verificando che si tratta di una funzione di classe C^2.

c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y(0)=\lambda$, $y'(0)=0$, disegnandone un grafico qualitativo nell'intorno di $x=0$.

d) Verificare il Teorema di Liouville per le equazioni scegliendo $x_0 = 0$.

2) Siano dati i seguenti integrali di una equazione differenziale lineare del II ordine:

$$y_1 = x + e^x\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \quad y_2 = e^x\left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right), \quad y_3 = e^x\left(2 + x - \frac{x^2}{2}\right).$$

a) Verificare che i tre integrali sono linearmente indipendenti

b) Senza determinare l'espressione esplicita dell'equazione, dire perchè non può essere omogenea.

c) Determinare l'integrale generale dell'equazione e scrivere l'integrale generale del sistema lineare naturalmente associato all'equazione.

d) Determinare un intervallo di esistenza dell'integrale generale, utilizzando il Teorema di Liouville.

3) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ determinare l'integrale generale della seguente equazione lineare completa

$$y'' + 2y' + (1+4\lambda^2)y = e^{-x}.$$

4) Per ogni $\lambda \neq 0$, determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - (\lambda + \lambda^2)y' + \lambda^3 y = \lambda^3.$$

5) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x} \\ y(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4}) = 0. \end{cases}$$

6) Per ogni $\lambda > 0$ determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2\lambda y' + (\lambda^2 + 4\lambda^4)y = \sin x.$$

7) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x + \lambda - 3.$$