CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 4

1) Verificare che la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \mathrm{sign}(\sin(2^n \pi x)) \qquad n \geq 0$$

costituisce un s.o.n. in $L^2(0,1)$

2) Dato un generico spazio con prodotto interno X, verificare che $\forall\, x,\, y \in X$ risulta

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

3) Ricordando che i polinomi di Legendre costituiscono una base per $L^2(-1,1)$, calcolare

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |\sinh x - a - bx - cx^2|^2\, dx.$$

4) Si consideri la funzione $f \in L^2(0,2\pi)$ definita da

$$f = \begin{cases} \sin x & x \in [0,\pi[\\ 0 & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della f rispetto alla base trigonometrica e dall'uguaglianza di Parseval dedurre il valore della somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

5) Ricordando che i polinomi di Legendre costituiscono una base per $L^2(-1,1)$, calcolare

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^4 - a - bx - cx^2 - dx^3|^2\, dx.$$

6) Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(0,2\pi)$ con l'usuale norma e sia F il sottospazio vettoriale di H definito da

$$F = \{f \in H : \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0\}.$$

Determinare $F^{\perp}$ e, detta $P_F f$ la proiezione di $f \in H$ su F, calcolare $\|e^x - P_F e^x\|$.

7) Utilizzando la disuguaglianza di Schwarz, verificare che

1) Se $[a, b]$ è un intervallo limitato e $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2\, dx = 0$, allora $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$.

2) Data $f \in L^2(0, +\infty)$ risulta $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|e^{-x}\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

8) Si consideri lo spazio $L^2(-1, 1)$ con l'usuale prodotto interno. Posto $x = \cos\theta$ e $T_n(x) = \cos(n\theta)$, verificare che le funzioni

$$C_n(x) = \frac{T_n(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

costituiscono un sistema di vettori ortogonali in $L^2(-1, 1)$. Calcolare, poi, esplicitamente $C_n(x)$ per $n = 0, 1, 2, 3$ e determinare la costante di normalizzazione necessaria perchè le funzioni C_n formino un sistema ortonormale.