CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 5

1) Data l'equazione

$$z_{xx} + 2\lambda x z_{xy} + (1 - 8\lambda^2 x^2) z_{yy} = 0, \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

classificarla per ogni λ. Scrivere poi l'equazione differenziale alla quale soddisfano le caratteristiche ed integrarla per $\lambda = \frac{1}{3}$.

2) Data l'equazione

$$36 u_{xx} - 12 u_{xy} + u_{yy} = 0$$

riconoscerne il tipo, metterla in forma canonica e trovare l'integrale generale.

3) Data l'equazione

$$(\cos^4 x)\, u_{xx} - \lambda^2 y\, u_{yy} - (\cos^4 x)\, u_x = 0,$$

dove λ è un parametro reale, nella striscia

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ |x| \le \frac{\pi}{2},\ -\infty < y < +\infty\}$$

riconoscerne il tipo, trovare tutte le linee caratteristiche ed integrare l'equazione per $\lambda = 0$.

4) Data l'equazione

$$(t^\alpha) u_{xx} - (x^\beta) u_{tt} = 0, \qquad \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0$$

in $\{x > 0,\ t > 0\}$, determinare le famiglie di linee caratteristiche nella forma $t = t(x)$. Posto, inoltre, $\alpha = \beta = 2$ e preso $(x, t) \in \mathbf{R}^2$, detta $\hat{u}(\omega, \tau)$ la trasformata di Fourier di u rispetto a x e a t, scrivere l'equazione cui soddisfa tale trasformata.

5) Consideriamo l'equazione

$$\lambda(z_{xx} + z_{yy}) + \mu(x z_{xy} + |y|) + \frac{1-\lambda}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\frac{z_x}{x} - \frac{1}{3}\right) - 3z = 0, \qquad \lambda,\ \mu \ge 0,\ \lambda^2 + \mu^2 > 0,$$

nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x > 0\}$.

1) Classificarla al variare di λ e μ.
2) Determinare le eventuali caratteristiche passanti per $P(\sqrt{8}, 0)$ quando $\lambda = \mu$.
3) Utilizzando il metodo di separazione delle variabili, integrare l'equazione in $\Omega\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x > 0,\ y > 1\}$ per $\lambda = 1$, $\mu = 0$ cercando soluzioni periodiche in x e limitate.

6) Consideriamo l'equazione

$$\lambda(x^2 z_{xx} + xy z_{xy} - \frac{3}{4} y^2 z_{yy}) + (\lambda - 2) z + (1 - \lambda)(z_x - z_y) = 0.$$

1) Classificarla per $\lambda \ne 0$ e determinare le caratteristiche.
2) Sempre per $\lambda \ne 0$ verificare che per $x > 0$ la retta $y = \frac{1}{2}$ può essere assunta come linea portante i dati. Determinare inoltre $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della z in $P(x, \frac{1}{2})$ con $x > \bar{x}$, non cambi il valore di $z(1, 1)$.
3) Ridurre l'equazione a forma canonica sempre per $\lambda \ne 0$.