CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 6

1) Vogliamo determinare la temperatura u di un corpo materiale sferico con centro nell'origine e raggio R, sapendo che:
1) u è funzione solo di ρ (distanza dall'origine) e t;
2) la superficie del corpo è mantenuta a temperatura nulla;
3) all'istante iniziale $t = 0$ risulta $u(0, \rho) = \frac{1}{\rho} \sin \frac{\pi\rho}{R}$.

Osservazione - Si tratta di risolvere l'equazione del calore $u_t - \triangle u = 0$ in simmetria sferica. Poichè u dipende solo da ρ e t, abbiamo

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Inoltre conviene operare un cambiamento di variabile, ponendo come nuova variabile

$$v = \rho\, u.$$

2) Risolvere il problema (della corda vibrante)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{in } [0, \pi] \times [0, 1] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x \\ u(x, 1) = \sin(2x) \end{cases}$$

Osservazione - Anzichè assegnare posizione e velocità all'istante $t = 0$, si assegna la posizione sia all'istante $t = 0$, sia all'istante $t = 1$.

3) Si consideri l'equazione

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0$$

per l'andamento della temperatura in una barra omogenea che occupa il segmento $[0, \pi]$ dell'asse delle x. All'istante iniziale $t = 0$ abbiamo

$$u(x, 0) = \sin x.$$

All'istante $t = 1$ si misura lo scambio di calore con l'esterno all'estremo posto in $x = 0$ della barra e si trova

$$\kappa u_x(0, 1) = \frac{1}{3}.$$

Sapendo che

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \qquad 0 < t < 1,$$

determinare κ se possibile.

4) Risolvere

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } x^2 + y^2 < 4 \\ u = \sin(5\theta) & \text{su } x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

5) Mediante il metodo di separazione delle variabili risolvere

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } x^2 + y^2 < R^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = K + \cos(5 \mathrm{artan} \dfrac{y}{x}) & \text{su } x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

dove $R > 0$ è un parametro reale. Discutere l'esistenza delle soluzioni al variare di K.

6) Posto $\Omega =]0, \pi[\times]0, \pi[$ ed indicato con $\partial\Omega$ il suo bordo, risolvere il problema

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{su } \partial\Omega \cap \{x > 0\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y) & \text{su } 0 < y < \pi \end{cases}$$

dove $g(y) = \cos y$.

7) Posto $\Omega =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ ed indicato con $\partial\Omega$ il suo bordo, nonchè $\Gamma_0 =]0, \pi[\times \{0\}$, $\Gamma_1 =]0, \pi[\times \{2\pi\}$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, risolvere il problema

$$\begin{cases} \triangle u - u = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{su } \Gamma_2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ u = x - \dfrac{\pi}{2} & \text{su } \Gamma_1. \end{cases}$$

8) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 < R^2\}$ e $\partial\Omega$ il suo bordo. Si consideri inoltre il parametro $\epsilon \in]0, \frac{1}{4}[$. Risolvere il problema

$$\begin{cases} \epsilon \triangle u_\epsilon - \dfrac{u_\epsilon}{\rho^2} = 0 & \text{in } \Omega \\ u_\epsilon = \sin\theta & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e studiare se esiste $\lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon$.