Analisi Matematica I - 03/03/22 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** |

A1. Si consideri la funzione $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(x+2) - e^{\frac{x}{2x-2}}$. Determinare il valore di $f^{-1}(\ln 4 - e)$ e di $(f^{-1})'(\ln 4 - e)$.

A2. Data la funzione $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-2)\, e^{-1/x}$, determinare e classificare i suoi punti stazionari.

A3. * Studiare, al variare del parametro $q > 0$, il carattere della seguente serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^{3/2} \ln\big(1 + (2q)^n\big)}$.

A4. Si consideri la funzione $f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$. Scrivere il Polinomio di Taylor di ordine 2 relativo a f centrato nel punto $x_o = 4$.

A5. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione $u''(t) + 25u(t) = 0$,

e trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + 25u(t) = 26e^t, \\ u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0, \end{cases}$$

A6. Calcolare i valori dei limiti: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \tfrac{\ln 2}{x}\right)^x$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\left(1 + \tfrac{2\ln 3}{x}\right)^x \left(\frac{\ln(1+\frac{2}{x}) - \frac{2}{x}}{\cos\frac{3}{x} - \cosh\frac{3}{x}}\right)$

A7. * Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale converge in senso generalizzato $\displaystyle\int_{\frac{1}{9}}^{1} \frac{\sin^2(\ln x)}{(1-x^2)^\alpha}\, dx$.

A8. Calcolare le radici quarte di $z = \left(\dfrac{2\sqrt{5}i}{1+i}\right)^2$ e scriverle in forma esponenziale.

B1. La successione $\{a_n\}$ soddisfa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se $\boxed{\text{A}}$ $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|} = 1$. $\boxed{\text{C}}$ converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. Siano $x_o \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ F non ha zeri. $\boxed{\text{B}}$ $F(x) > 0$ se $x > x_o$ e $F(x) < 0$ se $x < x_o$. $\boxed{\text{C}}$ F è continua in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ F è derivabile in $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

B3. Posto $z = x + iy$, il luogo dei punti del piano complesso $\mathbb{C}$ che soddisfa $|z - (1+i)| < \sqrt{2}$ è dato da $\boxed{\text{A}}$ $x^2 + y^2 - 2x - 2y \geq 0$. $\boxed{\text{B}}$ $x^2 + y^2 - 2x - 2y < 0$. $\boxed{\text{C}}$ $x^2 + y^2 - 2x - 2y > 0$. $\boxed{\text{D}}$ $x^2 + y^2 - 2x - 2y \leq 0$.

B4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) + \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $\alpha > 0$ tale che $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ per $x \to +\infty$.

B5. Sia P_3 il Polinomio di Taylor di ordine 3 relativo a $f(x) = (x-2)\ln(x-1)$ centrato nel punto $x_o = 2$. Allora $P_3(3) =$ $\boxed{\text{A}}$ 2. $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ 0.

B6. Sia I un intervallo della retta reale, x_0 un punto interno ad I e $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione continua nel suo dominio. Allora $\boxed{\text{A}}$ f si può prolungare con continuità in x_0 se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ f si può prolungare con continuità in x_0 se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

B7.* Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che $\{a_n^2\}$ risulta crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\{a_n\}$ risulta crescente. $\boxed{\text{B}}$ $\{\arctan(a_n^2)\}$ risulta convergente. $\boxed{\text{C}}$ esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{D}}$ $\{a_n\}$ risulta limitata.

B8.* Sia $f\colon [-5,0] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[-5,0]$ e derivabile in $(-5,0)$. Se $f(-5) = 2$ e $f'(x) \leq 1$ per ogni $x \in (-5,0)$, allora $\boxed{\text{A}}$ $f(0) \geq 7$. $\boxed{\text{B}}$ $f(0) \leq 7$. $\boxed{\text{C}}$ $f(0) \leq 5$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists c \in (-5,0) : f'(c) = f(0) - 2$.