Analisi Matematica 1 - 13/02/23 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ______ **Cognome** ______ **Nome** ______

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Data la funzione $f(x) = \frac{|x-6|}{x+8}$ per $x \in \mathbb{R}\backslash\{-8\}$, calcolare $\inf f$ e $\sup f$:
Trovare eventuali punti di massimo e minimo e dire se sono punti di massimo e minimo locali o globali:

A2. Si consideri $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln^2(2x) + 2\ln(2x) + 3$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = \frac{e}{2}$.

A3. Calcolare il valore dei seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sinh(x-1) - \sin((x-1)^2)}{\cos(x+1)\arctan(x-1) + \sqrt{(1-\cos(x-1))}}$$

A4. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u''(t) - 7u'(t) = 0$:
Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - 7u'(t) = 3e^{-t}, \\ u(0) = \frac{3}{8}, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

A5. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{6n}\left(\sqrt{1+n^\alpha} - 1\right)}{n^{7\alpha}(2\sinh(6n) + \sin n)}$

A6. Sia $f : (0, +\infty)\backslash\{1/3\} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \frac{\ln(2x)}{\ln(3x)}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_o = \frac{e}{3}$

A7.* Trovare una primitiva di $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+6x}) + \frac{x}{x+2+\sqrt{x+2}}$, per $x > 0$.

A8.* Sia $w = 1 + i$. Calcolare $A = \left|w - \frac{i}{w}\right|$

Con il valore di A trovato, risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2|z| = A^2 i$

B1. Sia $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[1,+\infty)$, derivabile in $(1,+\infty)$ e tale che $f(1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$. Allora:
$\boxed{A}$ $\exists\, \xi \in (1,+\infty)$ tale che $f(\xi) < 4$. $\boxed{B}$ $\exists\, \xi \in (1,+\infty)$ tale che $f(\xi) > 4$. $\boxed{C}$ $\exists\, \xi \in (1,+\infty)$ tale che $f(\xi) = 4$. $\boxed{D}$ $\exists\, \xi \in (1,+\infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

B2. * Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^3 e sia $P_3(x,0) = 8 + 4x + 7x^2 + 2x^3$ il suo polinomio di Taylor-McLaurin di grado 3 centrato in $x_0 = 0$. Allora: $\boxed{A}$ L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x = 0, y = 8)$ è $y = 8 + 4x$. $\boxed{B}$ $f(x) = 8 + 4x + 7x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$. $\boxed{C}$ $f'''(0) = 6$. $\boxed{D}$ $f(x) = 8 + 4x + o(x^2)$ per $x \to 0$.

B3. Sia (a_n) una successione a valori reali tale che $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge. Allora,
$\boxed{A}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2n\pi)a_n$ converge. $\boxed{B}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi)a_n$ converge. $\boxed{C}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. $\boxed{D}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

B4. * Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Sia $L = \int_a^b f(x)dx$. Allora:
$\boxed{A}$ per ogni $\lambda \in [0,L]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $\int_a^c f(x)dx = \dfrac{\lambda}{b-a}$. $\boxed{B}$ per ogni $\lambda \in [0,L]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $\int_a^c f(x)dx = \lambda(b-a)$. $\boxed{C}$ per ogni $\lambda \in [0,L]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $\int_a^c f(x)dx = f(\lambda)$. $\boxed{D}$ per ogni $\lambda \in [0,L]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $\int_a^c f(x)dx = \lambda$.

B5. Siano $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a,b)$ e $\lim_{x\to x_o} f(x) = L > 0$. Allora:
$\boxed{A}$ $f(x) = L + o(x - x_o)^2$ per $x \to x_o$. $\boxed{B}$ $\forall\, x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$ con $\delta > 0$ opportuno, risulta $f(x) > 0$. $\boxed{C}$ $f(x_o) = L$. $\boxed{D}$ $\lim_{x\to x_o} \dfrac{L}{f(x)} = 1$.

B6. Sia $f(x) = o\,(\ln x)$ per $x \to 0^+$ e $g(x) \sim x^2$ per $x \to 0^+$. Allora,
$\boxed{A}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. $\boxed{B}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. $\boxed{C}$ $f(x) \cdot g(x) \sim x^2 \ln x$ per $x \to 0^+$. $\boxed{D}$ $f(x) \cdot g(x) = o\left(x^2 \ln x\right)$ per $x \to 0^+$.

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $|f(x)| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{A}$ f è derivabile in 0. $\boxed{B}$ f è continua in 0. $\boxed{C}$ $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{D}$ f ammette asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$.

B8. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e risulti $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora:
$\boxed{A}$ il massimo M e il minimo m hanno segni opposti. $\boxed{B}$ il massimo M e il minimo m possono essere assunti in più punti. $\boxed{C}$ non esiste $x_o \in (a,b)$ t.c. $f(x_o) = 0$. $\boxed{D}$ il massimo M e il minimo m hanno lo stesso segno.