Analisi Matematica 1 - 13/09/23 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ☐ **Cognome** ☐ **Nome** ☐

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Sia $f : (7, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \ln \sqrt[3]{x^2 - 7^2}$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = 7\sqrt{2}$.

A2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) + \sin(t)u(t) = \sin(t), \\ u(0) = 5. \end{cases}$$

A3. Si consideri $f : [7, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 7^2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(7\sqrt{5}, f(7\sqrt{5}))$.

A4. Calcolare il valore dei seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{7}{\ln(1 + 7^n)}\right)^n$

$$\lim_{x\to 7} \frac{1}{x} \left(\frac{\sinh^2(x - 7)}{1 - \cos(x - 7) + \sin^3(x - 7)} \right)$$

A5. * Determinare la primitiva $G(x)$ della funzione $f(x) = \dfrac{7^x}{7^{2x} + 2 \cdot 7^x + 1}$ tale che $G(0) = 0$.

Calcolare quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$

A6. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 4\arctan(n)}{(n^4 + 3n - 1)^\alpha}$

A7.* Data la funzione $f\colon [1, 8] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^6 - 2x^4 + 4x^2 + 7$, individuare i suoi punti di massimo e di minimo assoluti (globali):

Calcolare il minimo assoluto (globale) di f:

A8. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(|z| - 7)\big(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\big) = 0$ e scriverle in forma esponenziale.

Risolvere in $\mathbb{C}$ il sistema $\begin{cases} |z| - 7 = 0 \\ \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$

B1. Si consideri $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$ se $x \neq 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. $\boxed{\text{B}}$ f è continua in $x = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2} = +\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

B2. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Poniamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x_0} f(t)\,dt$ e $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$. Allora la derivata prima di $F(x)G(x)$ è pari a: $\boxed{\text{A}}$ $f(x)G(x) - F(x)g(x)$. $\boxed{\text{B}}$ $F(x)g(x) + f(x)G(x)$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)g(x)$. $\boxed{\text{D}}$ $F(x)g(x) - f(x)G(x)$.

B3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ e sia $P_2(x, 7) = 7 - x$ il suo polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x_0 = 7$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ f è decrescente in un intorno di $x_0 = 7$. $\boxed{\text{B}}$ $f \leq 0$ in un intorno di $x_0 = 7$. $\boxed{\text{C}}$ f è una retta. $\boxed{\text{D}}$ $f \geq 0$ in un intorno di $x_0 = 7$.

B4. Si considerino le funzioni $f(x) = \sin(x^2)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x)g(x) \sim x^3$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)g(x) \sim x^4$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x)g(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$.

B5. Data la successione (a_n) con $n \geq 1$, risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = L > 0$, finito. Allora $\boxed{\text{A}}$ La successione $(b_n) = (e^{a_n})$ è monotona crescente. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = \cos L$. $\boxed{\text{C}}$ La successione $(b_n) = (e^{-a_n^2})$ è monotona decrescente. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n^2} = 0$.

B6.* Sia $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che $f'(2) = 4$ e $f'(3) = 1$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $f \geq 0$ in un intorno di $x_0 = 2$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists \xi \in (1, 4)$ tale che $f'(\xi) = 2$. $\boxed{\text{C}}$ f è crescente in $[1, 4]$. $\boxed{\text{D}}$ $f \geq 0$ in un intorno di $x_0 = 3$.

B7. * Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{e^n}\right) = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) = 1$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{\sin n}{n}\right) = 1$.

B8. Sia (a_n) una successione a valori reali positivi tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^7$ è convergente. Allora, $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=3}^{+\infty} (a_n)^8$ è convergente. $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=9}^{+\infty} \ln(a_n)$ è convergente. $\boxed{\text{C}}$ (a_n) è decrescente. $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{n=7}^{+\infty} (a_n)^6$ è divergente a $+\infty$.