Analisi Matematica I - 14/02/22 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | **Cognome** | **Nome**

A1. Data la funzione $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 8\,\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$, determinare l'ascissa x_M del punto di massimo assoluto e il valore M di tale massimo.

A2.* Studiare, al variare del parametro $q \geq 0$, il carattere della seguente serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \ln(1+n)}{n2^{n+1}}$.

A3. Determinare le soluzioni della seguente equazione $(e^{|z|} + 7)(z^2 - |z|^2 + 1 + 2i) = 0$ e scriverle in forma algebrica.

A4. Calcolare tutte le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{9x^2+3}{x}\ln x$, per $x > 0$.

A5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2+4)e^{2+x}$. Scrivere il Polinomio di Taylor di ordine 2 relativo a f centrato nel punto 2.

A6. Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{x\to 2} 2x \left(\frac{\ln(x-1) - \sinh(x-2)}{\cos(x-2) - \cosh(x-2)} \right)$.

A7.* Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $u'(t) + 2tu(t) = 0$:

Si scriva poi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + 2tu(t) = 2t^3, \\ u(0) = -1, \end{cases}$$

A8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2(x+2) + \sin(2x) + \tanh(2x)$. Determinare il valore di $f^{-1}(4)$ e di $(f^{-1})'(4)$.

B1. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_o \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esista, finito o infinito, $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Allora anche $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = \ell$, SE $\boxed{\text{A}}$ $f_1(x) \sim g(x)$, per $x \to x_o$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) \sim f_1(x)$ per $x \to x_o$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = o\big(f_1(x)\big)$ per $x \to x_o$. $\boxed{\text{D}}$ $f_1(x) = o\big(f(x)\big)$ per $x \to x_o$.

B2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge; allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall n \geq 1$ risulta $a_{n+1} \leq a_n$. $\boxed{\text{B}}$ Converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n \to \infty} \sin(a_n) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ Converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

B3. Si consideri il polinomio $P(z) = (z^4 - 1)(z^4 + 1)$. Quale è il numero delle soluzioni in campo complesso dell'equazione $\sqrt{P(z)} = 0$? $\boxed{\text{A}}$ 16. $\boxed{\text{B}}$ 4. $\boxed{\text{C}}$ 8. $\boxed{\text{D}}$ 3.

B4.* Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ F è derivabile da destra in 0. $\boxed{\text{B}}$ F è strettamente crescente e illimitata nel suo dominio. $\boxed{\text{C}}$ F ha un punto stazionario $x_o > 0$. $\boxed{\text{D}}$ F è strettamente crescente e limitata nel suo dominio.

B5. Sia P_1 il Polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 1 relativo a $f(x) = \left(\cos \frac{x}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ centrato nel punto $x = 0$. Allora $P_1(4) =$ $\boxed{\text{A}}$ -2. $\boxed{\text{B}}$ 4. $\boxed{\text{C}}$ 0. $\boxed{\text{D}}$ 2.

B6. Siano $a < b$ e $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) tali che $f(a) = 2g(a)$ e $f(b) = 2g(b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ Esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = g'(c) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ Esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{1}{2} g'(c)$. $\boxed{\text{C}}$ Esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 2g'(c)$. $\boxed{\text{D}}$ Esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = g'(c)$.

B7. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che $\{n a_n\}$ risulta limitata. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n \to +\infty} n a_n = \ell \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n \to +\infty} n^2 a_n = +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n \to +\infty} n^2 a_n = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

B8.* Siano I_1, I_2 due intervalli della retta reale e $f \colon I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. $\boxed{\text{A}}$ Se $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ allora f ha massimo e minimo. $\boxed{\text{B}}$ Se f è iniettiva, allora è strettamente monotona. $\boxed{\text{C}}$ Se I_1 e I_2 sono chiusi e limitati, allora f ha massimo e minimo. $\boxed{\text{D}}$ Se $I_1 = [0, 1]$, allora f ha massimo e minimo.