Analisi Matematica I - 14/07/22 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

A1.* Sia $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^4-4x^2$. Determinare il massimo e il minimo assoluti di f in $[-4,4]$.

A2. Calcolare il valore del seguente limite: $\lim_{t\to 1^-}\left(\arctan(2(1-t))+\frac{(t^{-2}-1)}{(1-t^7)}\right)$

A3. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z-2\,i)^4=\frac{11}{i}$.

A4. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\frac{\sin(2x)}{x}$. Calcolare l'espressione del polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 centrato nel punto $x_o=\frac{\pi}{4}$.

A5. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t)-2u(t)=8\cos(t), \\ u(0)=-\frac{5}{3}, \qquad u'(0)=0. \end{cases}$$

A6. Calcolare il valore del seguente integrale definito: $\int_{-\pi}^{\pi} 2|x|+7\cos(x)e^x\,dx$.

A7.* Stabilire per quali valori del parametro reale α converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-n}{n^\alpha\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)\cos^3\left(\frac{1}{n}\right)}$.

A8. Sia $f:[3,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^x$. Scrivere l'equazione della retta r, tangente al grafico della f nel punto $Q=(6,f(6))$.

B1.* Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. f ha almeno uno zero nell'intervallo (a,b) SE: $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ $\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) \leq 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to a^+} f(x) < \lim_{x\to b^-} f(x)$. $\boxed{\text{D}}$ $\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) < 0$.

B2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, il suo Polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 centrato in $x_o = 0$ è $P_2(x;0) = 1 + x + x^2$. Allora, data $g(x) = e^{f(x)}$, risulta $\boxed{\text{A}}$ $g'(0) = 2$. $\boxed{\text{B}}$ $g'(0) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $g(0) = 1$. $\boxed{\text{D}}$ $g''(0) = 3e$.

B3. Si consideri l'insieme $S \subset \mathbb{R}$ definito da $S = \{x_n = \ln(1+n) + (-1)^{n+1},\ n = 0, 1, 2, \dots\}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \sup S$. $\boxed{\text{B}}$ $\sup S = n + 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\inf S = -1$. $\boxed{\text{D}}$ $\nexists \inf S$.

B4. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. $\boxed{\text{C}}$ anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

B5. Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ un punto interno e $f\colon I \to \mathbb{R}$. f è derivabile nel punto x_0 SE: $\boxed{\text{A}}$ f è continua in tutto I. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 340$. $\boxed{\text{C}}$ Esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B6. * Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(1) = 2$ e $f'(1) = -3$. Sia $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t^2)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $F(x) = 2(x+1) - 3(x+1)^2 + o(x+1)^2$, per $x \to -1$. $\boxed{\text{B}}$ $F(x) = 3(x+1) + 2(x+1)^2 + o(x+1)^2$, per $x \to -1$. $\boxed{\text{C}}$ $F(x) = -2(x+1) + (x+1)^2 + o(x+1)^2$, per $x \to -1$. $\boxed{\text{D}}$ $F(x) = 2(x+1) + 3(x+1)^2 + o(x+1)^2$ per $x \to -1$.

B7. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) \sim x\ln(x)$ per $x \to +\infty$. Allora, per $x \to +\infty$, $\boxed{\text{A}}$ $e^x = o(f(x))$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = o(\ln(x))$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = o(x^{3/2})$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x) = o(x)$.

B8. Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\{a_n\}$ ammette limite. $\boxed{\text{B}}$ $\{\ln(1 + a_n^2)\}$ è crescente. $\boxed{\text{C}}$ $\{a_n\}$ è limitata. $\boxed{\text{D}}$ $\{a_n\}$ è convergente.