Analisi Matematica 1 - 14/07/23 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha}}{\sqrt{n}}$

A2. Data la funzione $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - e^{4\sin(x)}$, individuare tutti i suoi punti di massimo e di minimo relativi (locali):

Calcolare massimo e minimo assoluti (globali) di f:

A3.* Calcolare $\displaystyle\int 2^{2x} \arctan(2^x)\, dx$.

A4.* Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = 4e^{4t}, \\ u(0) = 2,\ u'(0) = 8. \end{cases}$$

A5. Calcolare il valore dei seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{6}{\ln(n^2)}\right)^{\ln(n)}$

$$\lim_{x\to 6} x \left(\frac{\sin(x-6) - \sinh(x-6)}{\arctan((x^2-12x+36)(x-6))}\right)$$

A6. Sia $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \arctan(\sqrt{3}-1+e^{3x})$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.

A7. Si consideri $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \arctan(2x) + \ln(1+e^{4x})$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = 0$.

A8. Calcolare le radici quarte di $i(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z - 7z^2 = 7|z|^2$.

B1. Si considerino le funzioni $f(x) = 1 - \cos x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x)g(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x)g(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)g(x) \sim x^3$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x)g(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

B2.* Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che esistono finiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$. $\boxed{\text{A}}$ Se $\ell_1 > \ell_2$ allora $f(x) > g(x)$ in un intorno di x_0 tranne al più x_0. $\boxed{\text{B}}$ Se $\ell_1 \geq \ell_2$ allora $f(x) \geq g(x)$ in un intorno di x_0 tranne al più x_0. $\boxed{\text{C}}$ Se $\ell_1 < \ell_2$ allora $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$. $\boxed{\text{D}}$ Se $\ell_1 = \ell_2$ allora $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

B3. Sia $f \colon [3, 5] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(3, 5)$ e continua in $x = 3$ e $x = 5$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\exists \xi \in (3, 5)$ tale che $f(3) - f(5) = -2f'(\xi)$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists \xi \in (3, 5)$ tale che $f'(\xi) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists \xi \in (3, 5)$ tale che $f(5) - f(3) = \frac{f'(\xi)}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists \xi \in (3, 5)$ tale che $f(3) - f(5) = 2f'(\xi)$.

B4. Sia data la successione $\{a_n\}$ con $n \geq 1$ definita da $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, $a_1 = 3$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$. $\boxed{\text{B}}$ La successione è monotona decrescente. $\boxed{\text{C}}$ La successione è indeterminata. $\boxed{\text{D}}$ La successione è monotona crescente.

B5. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ e sia $P_2(x, -1) = 1 + x + x^2$ il suo polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x_0 = -1$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $f(-1) = -1$. $\boxed{\text{B}}$ $f''(-1) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $f'(-1) = 1$. $\boxed{\text{D}}$ $f(-1) = 1$.

B6. Sia (a_n) una successione a valori reali tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) a_n$ è convergente. Allora, $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=7}^{+\infty} |a_n|$ è convergente. $\boxed{\text{B}}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=3}^{+\infty} |\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) a_n|$ è divergente a $+\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{n=9}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

B7.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) = 2$. Posto $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, risulta che $\left(F^{-1}\right)'(0)$ è pari a: $\boxed{\text{A}}$ 0. $\boxed{\text{B}}$ 1. $\boxed{\text{C}}$ 1/2. $\boxed{\text{D}}$ 2.

B8. Si considerino $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{|\sin x|}}$ se $x \neq 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ f è continua in $x = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = +\infty$.