Analisi Matematica I - 14/09/22 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

A1. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 + 4\,iz^2 - 4 = 0$.

A2.* Sia $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x^3 + 12x$. Determinare il massimo e il minimo assoluti di f in $[0,4]$.

A3. Calcolare il valore del seguente limite: $\lim_{x\to 2}\left(2\cosh(x-2) + \frac{\ln(x-1) - 2\sin(x-2)}{(x-1)^2 - (1+\sinh(x-2))}\right)$

A4.* Calcolare il valore del seguente integrale definito: $\int_0^6 \frac{1}{4+x^2}\left(1+\arctan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,dx.$

A5. Sia $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\tan(2x)$. Scrivere l'equazione della retta r, tangente al grafico della f nel punto $Q = \left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$.

A6.* Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\right]$.

A7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2x}\sin(7x)$. Calcolare l'espressione del polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 centrato nel punto $x_o = \frac{\pi}{14}$.

A8. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = e^{3t}, \\ u(0) = 1, \qquad u'(0) = 2. \end{cases}$$

B1.* Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $xf(x) > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x (3 - \cos t) f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{A}$ $x_o = 0$ è un punto di minimo assoluto per F. $\boxed{B}$ $x_o = 0$ non è un punto di estremo per F. $\boxed{C}$ F è strettamente monotona. $\boxed{D}$ $x_o = 0$ è un punto di massimo assoluto per F.

B2. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \neq 0\ \forall\, n \geq 0$ converge. Allora $\boxed{A}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. $\boxed{B}$ $a_{n+1} \leq a_n\ \forall\, n \geq 0$. $\boxed{C}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\boxed{D}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$.

B3. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione concava. Allora: $\boxed{A}$ f è decrescente in $[a,b]$ $\boxed{B}$ Se $f \in C^1([a,b])$, allora f' è decrescente in $[a,b]$. $\boxed{C}$ Se $f \in C^2([a,b])$, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. $\boxed{D}$ f è crescente in $[a,b]$.

B4. Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Allora $\boxed{A}$ $\not\exists \inf\limits_n a_n$. $\boxed{B}$ $\sup\limits_n a_n = \max\limits_n a_n = 3$. $\boxed{C}$ $\sup\limits_n a_n = 2$. $\boxed{D}$ $\not\exists \sup\limits_n a_n$.

B5. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) \sim x^2 \tanh(x)$ per $x \to +\infty$. Allora,
$\boxed{A}$ $f(x) = o(x^2)$, per $x \to +\infty$. $\boxed{B}$ $f(x) = o(x \tanh(x))$, per $x \to +\infty$. $\boxed{C}$ $f(x) = o(x)$, per $x \to +\infty$. $\boxed{D}$ $f(x) \sim x^2$, per $x \to +\infty$.

B6. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente. Allora:
$\boxed{A}$ $f(a) = \displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)$. $\boxed{B}$ f è invertibile in $[a,b]$. $\boxed{C}$ Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ha almeno uno zero in $[a,b]$. $\boxed{D}$ f è continua in $[a,b]$.

B7.* Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, il suo Polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 3 centrato in $x_o = 0$ è $P_3(x; 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{(k!)^2} x^k$. Allora, $\boxed{A}$ $f'''(0) = \dfrac{1}{5}$. $\boxed{B}$ $f'''(0) = \dfrac{1}{12}$. $\boxed{C}$ $f'''(0) = \dfrac{1}{36}$. $\boxed{D}$ $f'''(0) = \dfrac{1}{6}$.

B8. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \to 0$ e $b_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$. Allora $\boxed{A}$ $b_n = o(a_n)$. $\boxed{B}$ $a_n + b_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $\boxed{C}$ $a_n b_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $\boxed{D}$ $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$