Analisi Matematica 1 - 15/02/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola [ ] Cognome [ ] Nome [ ]

Ing. Elettronica e Informatica ☐ Bioingegneria ☐ Ing. Industriale ☐

A1. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''-3y'+2y=0$.

Trovare la soluzione che soddisfa $y(0)=1, y'(0)=-1$

A2. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0=0$ di $f(x)=(\sin x)^2\ln(7+x)$.

A3. Data la funzione $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita come: $f(x)=x\cos(\ln(x^6))$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(e, f(e))$:

A4*. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)\left(\sin(\frac{1}{2}x)-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{12}\sin x^3\right)}{\left[1-(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]^4}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{[7\arctan n+\arctan(1/n)]n}{\ln(1+2^n)}$

A5. Trovare le soluzioni $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ dell'equazione $z^2+2(Im(z))^2-12Re(z)+6\bar{z}=(Re(z))^2$:

Calcolare $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$:

A6*. Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definita da $f(x)=\begin{cases}0, & \text{se } x=0,\\ e^{-2/x}(x^2-3\cdot 2^2), & \text{se } x>0.\end{cases}$

Indicare l'intervallo in cui risulta $f(x)\le 0$.

Determinare il minimo assoluto m della f e l'unico punto x_m in cui esso è assunto.

A7. Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\alpha n}\left[1-\cos(\frac{2}{n})\right]^2}{7^n}$:

A8. Calcolare $I=\displaystyle\int_{-\frac{\ln 3}{4}}^{\frac{\ln 3}{4}}\frac{\arctan(e^{2x})}{(1+e^{4x})}e^{2x}\,dx.$

B1. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) \neq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ e $\lim_{z\to 2} g(z) = 4$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 1} g(f(x)) = 4$. $\boxed{\text{B}}$ Non esiste $\lim_{x\to 1} g(f(x))$. $\boxed{\text{C}}$ $g(f(1)) = 4$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 2} g(f(x)) = 4$.

B2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convessa in $[a,b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f' è crescente in $[a,b]$. $\boxed{\text{B}}$ f è continua in (a,b). $\boxed{\text{C}}$ $f'' \geq 0$ in $[a,b]$. $\boxed{\text{D}}$ f è continua in $[a,b]$.

B3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ e sia $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, F è derivabile tre volte in x_0. $\boxed{\text{B}}$ Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $F'(x) = f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ F è decrescente. $\boxed{\text{D}}$ $F(0) = 0$.

B4. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{3} \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi n)}{3} \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. $\boxed{\text{B}}$ La serie converge assolutamente. $\boxed{\text{C}}$ La serie diverge. $\boxed{\text{D}}$ La serie converge semplicemente.

B5. * Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali definita da $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n^3 - a_n, & n \geq 0, \\ a_o = 3. \end{cases}$ Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -2$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

B6. Sia f una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x - 3x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

B7. Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è limitata. $\boxed{\text{B}}$ f non può essere iniettiva. $\boxed{\text{C}}$ f ha un punto stazionario. $\boxed{\text{D}}$ f non ha punti di estremo.

B8* Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$ e $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ Se $f(0) = 0$, allora $f(x)g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x)g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ Se $f(0) = 0$, allora $\frac{g(x)}{f(x)} = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\frac{g(x)}{f(x)} = o(x^2)$ per $x \to 0$.