Analisi Matematica I - 22/06/22 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

A1. Calcolare il valore del seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^7 + 2|x| + 7xe^{7x}\,dx.$

A2.* Sia $f : [2,6] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2x^2 - 4)\ln\left(\dfrac{3x}{2}\right)$. Determinare il massimo ed il minimo assoluti di f nell'intervallo $[2,6]$.

A3. Sia $f : (-2,2) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln\left(\dfrac{4-x^2}{16-x^2}\right)$. Sia r la retta tangente al grafico della f nel punto $Q = (1, f(1))$. Detto P il punto di intersezione di r con l'asse delle y, calcolare l'ordinata di P.

A4. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + 7u(t) = 2e^t, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

A5. Calcolare il valore del seguente limite: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\tanh(2x) + \frac{(e^{7x} - 1 - x)(\cos x - 1)}{(x - \sin x)}\right)$

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(1-x)\sin(1-x)$. Calcolare l'espressione del polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 centrato nel punto $x_o = \dfrac{1}{2}$.

A7.* Stabilire per quali valori del parametro reale α convergono *entrambe* le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + e^{-n}}{(n - \arctan n)^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n^{1/2}}$.

A8. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $\bar{z}^2 - i\,\mathcal{I}m(z^2) = 4iz - (\mathcal{I}m\, z)^2$ e scriverle in forma algebrica.

B1. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| > M$, per ogni $n \geq \nu$. Allora $\boxed{A}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = +\infty$. $\boxed{B}$ $\{a_n\}$ è limitata inferiormente. $\boxed{C}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. $\boxed{D}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

B2. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$. Allora $\boxed{A}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = 1$. $\boxed{B}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f^2(x)+g(x)}{g(x)} = 0$. $\boxed{C}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g^2(x)}{g^2(x)} = 0$. $\boxed{D}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f^2(x)+g(x)}{g^2(x)} = 1$.

B3.* Sia $F(x) = \int_0^x t^4 \ln(1+t^2)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{A}$ $F(x) = x + o(x)$, per $x \to 0$. $\boxed{B}$ F è limitata. $\boxed{C}$ F non ha punti stazionari. $\boxed{D}$ F non ammette né massimo né minimo.

B4. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Allora $\boxed{A}$ $|a_n| = o\left(\frac{1}{n}\right)$. $\boxed{B}$ anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\sin(a_n)|$ converge. $\boxed{C}$ anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge. $\boxed{D}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+|a_n|} = 1$.

B5. Si consideri l'insieme $S \subset \mathbb{R}$ definito da $S = \{q \in \mathbb{Q} :\ q^2 < 3\} \cap \{x_n = 3 - \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}\}$. Allora $\boxed{A}$ $\sup_{\mathbb{R}} S = 3$. $\boxed{B}$ $\nexists \sup_{\mathbb{R}} S$. $\boxed{C}$ $\inf_{\mathbb{R}} S = 0$. $\boxed{D}$ $\sup_{\mathbb{R}} S = 2$.

B6. Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$. Allora $\boxed{A}$ Se f è derivabile in x_0 e x_0 è un punto di minimo interno ad I, allora $f'(x_0) = 0$. $\boxed{B}$ Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) \neq 0$. $\boxed{C}$ Se x_0 è un punto di massimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$. $\boxed{D}$ Se f è derivabile in I, allora $\exists c \in I$ tale che $f'(c) = 0$.

B7.* Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\boxed{A}$ f ammette massimo o minimo in (a,b). $\boxed{B}$ Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $f(\frac{a+b}{2}) < l$, allora f ammette minimo in (a,b). $\boxed{C}$ Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f ammette massimo e minimo in (a,b). $\boxed{D}$ Esiste (finito o infinito) $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

B8. Sia $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, di classe C^∞, tale che per $\forall\, k \in \mathbb{N}$ risulta $f^{(2k)}(0) = 2k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Allora, data $g(x) = \ln(1 + f(x))$, il Polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della g centrato in $x_o = 0$ risulta $\boxed{A}$ $P_2(x; 0) = 0$. $\boxed{B}$ $P_2(x; 0) = 1 + x^2$. $\boxed{C}$ $P_2(x; 0) = x^2$. $\boxed{D}$ $P_2(x; 0) = x$.