Analisi Matematica 1 - 25/01/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ☐ **Cognome** ☐ **Nome** ☐

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Data la funzione $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita come: $f(x) = \frac{x^5}{6} + e^{x-1} + 6\ln(x)$, calcolare:

$f^{-1}(\frac{7}{6}) =$ ☐ e $(f^{-1})'(\frac{7}{6}) =$ ☐

A2. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \dfrac{x^9}{x^{10}+1} y = x^9$.

Trovare la soluzione che soddisfa $y(0) = 1$

A3. Calcolare $A = \left|\frac{6+6\,i}{1-i}\right|$:

Risolvere in $\mathbb{C}$, scrivendo le soluzioni in forma esponenziale, l'equazione: $|z|\Big(z^7 - A(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})\Big) = 0$

A4. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{4}{n} - \sin(\frac{4}{n})\right)^{\alpha}}{\cos(\frac{3}{n})\left(\ln(1+\frac{7}{n}) + \sinh(\frac{2}{n})\right)^2}$:

A5.⋆ Sia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x = 7, \\ \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-7}\right), & \text{se } x \neq 7. \end{cases}$

Determinare il massimo assoluto M della f ed il punto x_M in cui è assunto.

A6. Calcolare $I = \displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 7} \frac{e^{2x}}{(e^x-2)(e^x-3)}\,dx$.

A7.⋆ Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x) - \ln(2+2x^2) + \ln 2 - x^2}{\left(e^{x^2/2} + \cosh(x) - 2\right)^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-7\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$

A8. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ della funzione $f(x) = x\cos^2(2x)$.

B1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $|f(x)| \leq 6$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e sia $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $F(0) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ F è limitata. $\boxed{\text{C}}$ F è continua su tutto $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $F'(x) = f(x)$.

B2. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(x) \sim \arctan x$ per $x \to +\infty$ e $g(x) = o(e^x)$ per $x \to +\infty$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\frac{f(x)}{g(x)} = o(e^x)$ per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x)g(x) = o(e^x)$ per $x \to +\infty$.

B3.* Siano f, g due funzioni di classe $C^2(\mathbb{R})$. Supponiamo che il polinomio di Taylor di f di ordine 2 centrato in -3 sia $1 + x - x^2$ e quello di g centrato in 1 sia $-4x + x^2$. Allora il polinomio di Taylor di $f \circ g$ di ordine 2 centrato in 1 è : $\boxed{\text{A}}$ $6 + 20x - 3x^2$. $\boxed{\text{B}}$ $6 - 20x + 3x^2$. $\boxed{\text{C}}$ $6 - 20x + 6x^2$. $\boxed{\text{D}}$ $3 + 20x + 3x^2$.

B4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. $\boxed{\text{A}}$ Se $f'(x_0) = 0$ e f è convessa allora x_0 è un punto di minimo per f. $\boxed{\text{B}}$ Se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 è un punto di estremo per f. $\boxed{\text{C}}$ Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ Se x_0 è un punto di estremo per f allora $f'(x_0) = 0$.

B5. Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali tale che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, n \geq 1$ è $a_n < 3$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists N_o \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n > N_o$ è $a_n > 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists N_o \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n > N_o$ è $a_n < 1$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall\, n \geq 1$ è $a_n > 0$.

B6. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) e^{1/n}}{\sqrt{n+2}}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ La serie converge semplicemente. $\boxed{\text{B}}$ $\nexists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) e^{1/n}}{\sqrt{n+2}}$. $\boxed{\text{C}}$ La serie converge assolutamente. $\boxed{\text{D}}$ La serie diverge.

B7.* Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che non esiste $\displaystyle\lim_{x\to 5} f(x)$. Allora,
$\boxed{\text{A}}$ Esistono finiti o infiniti $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} f(x)$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} f(x) \neq f(5)$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall\, l \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall\, \delta > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $|x - 5| < \delta$ e $|f(x) - l| > \varepsilon$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall\, \delta > 0$ se $|x - 5| < \delta$ allora $|f(x) - f(5)| \leq \varepsilon$.

B8. Sia f continua in (a, b), $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \exists x_o \in (a, b)$ t.c. $f(x_o) = \lambda$. $\boxed{\text{B}}$ $\nexists\, x_o \in (a, b)$ t.c. $f(x_o) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x - a)f(x) = 1$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (x - b)f(x) = -1$.