Analisi Matematica I - 26/01/23 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

A1.* Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come: $f(x) = \frac{(x-6)+1}{(x-6)^2+3}$, determinarne gli zeri: e i punti di massimo e minimo, stabilendo se sono locali o globali:

A2. Sia $f : \mathbb{R} \backslash \left\{ 3 + \dfrac{2k+1}{2}\pi \right\} \to \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{Z}$, definita da $f(x) = \dfrac{\sin(6+x)}{\cos(3-x)}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x = 0$

A3. Si consideri $f : \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty \right) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x+3}\right)$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x = 0$.

A4. Calcolare il valore dei seguenti limiti: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{6}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1) - 6\sinh(x-1)}{\arctan(x-1) + \sin^2(x-1)}$$

A5. Sia $w = 6 + 2\,i$. Calcolare $A = \dfrac{1}{2}\Big(\mathrm{Re}(iw) + \mathrm{Im}(\bar{w})\Big)$

Con il valore di A trovato, risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione $|z|^2 - \bar{z} = -2A + \dfrac{A}{2}i$

A6.* Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan(2+n^\alpha)}{n^{2\alpha}(\sqrt{n+6} - \sqrt{n-6})}$

A7. Trovare la soluzione del problema di Cauchy in $[1, +\infty)$

$$\begin{cases} u'(t) + 2\dfrac{u(t)}{t} = \dfrac{3}{t^2}, \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

A8. Trovare una primitiva di $f(x) = x\sinh(6x^2) + x\sin(3x)$

Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$

B1. Sia $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ una funzione dispari, continua in $[-1,1]$ e derivabile in $(-1,1)$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\exists\ \xi\in(-1,1)$ tale che $f'(\xi)=0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists\ \xi\in(-1,1)$ tale che $f'(\xi)=f(1)-f(-1)$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists\ \xi\in(-1,1)$ tale che $f'(\xi)=\frac{f(1)}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists\ \xi\in(-1,1)$ tale che $f'(\xi)=f(1)$.

B2. Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $(0,1]$. f risulta integrabile in $[0,1]$ SE:
$\boxed{\text{A}}$ $f(0)=0$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)\sim\dfrac{1}{x}$, per $x\to0^+$. $\boxed{\text{D}}$ esiste finito $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

B3.* Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $P_2(x,1)=x+x^2$ il suo polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x_0=1$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $f''(1)=1$. $\boxed{\text{B}}$ $f'(1)=3$. $\boxed{\text{C}}$ $f(1)=3$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(1)=1$.

B4. Sia (a_n) una successione a valori reali tale che $\sum\limits_{n=7}^{+\infty}\arctan(a_n)$ converge. Allora,
$\boxed{\text{A}}$ $\sum\limits_{n=9}^{+\infty}\cos(a_n)$ è convergente. $\boxed{\text{B}}$ (a_n) è infinitesima. $\boxed{\text{C}}$ $\sum\limits_{n=8}^{+\infty}|\arctan(a_n)|<+\infty$. $\boxed{\text{D}}$ Non esiste $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

B5. Siano $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definita da $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$, $f(x)=\arctan e^{1/x^2}$ se $x\neq0$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ f non è limitata in $[-1,1]$. $\boxed{\text{B}}$ f è discontinua in $x=0$. $\boxed{\text{C}}$ f è discontinua in $x=-1$ e in $x=1$. $\boxed{\text{D}}$ f è continua in $[-1,1]$.

B6.* Sia $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ per $x\to+\infty$. Allora,
$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=1$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)f(x)=0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{5/2}}$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall\epsilon>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2+\epsilon}f(x)=0$.

B7. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi, tale che $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. Allora $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{1/a_n}=$ $\boxed{\text{A}}$ 1. $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$. $\boxed{\text{C}}$ 0. $\boxed{\text{D}}$ non esiste.

B8. Sia $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione data. f ammette limite per $x\to+\infty$ SE : $\boxed{\text{A}}$ f è continua. $\boxed{\text{B}}$ f è monotona. $\boxed{\text{C}}$ f è derivabile. $\boxed{\text{D}}$ f è limitata.