Analisi Matematica 1 - 26/06/23 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 4u(t) = t, \\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

A2.* Data la funzione $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 6\sin(x)e^x$, individuare tutti i suoi punti di massimo e di minimo relativi (locali):

Calcolare massimo e minimo assoluti (globali) di f:

A3. Calcolare il valore dei seguenti limiti: $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{6}{e^n}\right)^{-e^n}$

$\lim_{x\to 6} \tan(x+6) \left(\frac{\cos(x-6) - 1 + [\ln(x-5)]^2}{\ln(x^2 - 12x + 37)}\right)$

A4. Calcolare $I = 3\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 3\cos x}\, dx$, usando un opportuno cambio di variabile.

A5. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[9]{n^9 + 2n} - n\right)^{\alpha} e^{\frac{1}{n^2}}$

A6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \frac{e^{x-3}}{\sqrt{x+3}}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(3, f(3))$.

A7. Si consideri $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-(x-2)}$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = 2$.

A8.* Calcolare il modulo del numero complesso $\frac{(2-2i)^{14}}{(1+i)^{12}}$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z|z|^2 - i\bar{z} = 0$ e scrivere le soluzioni in forma algebrica.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 2$. Posto $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, risulta che il $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$ è pari a: $\boxed{\text{A}}$ 1. $\boxed{\text{B}}$ 1/2. $\boxed{\text{C}}$ 0. $\boxed{\text{D}}$ 2.

B2. Sia (a_n) una successione a valori reali tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=8}^{+\infty} a_n$ è convergente. Allora,

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\tfrac{1}{a_n}\right) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{1/a_n} = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = 1$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\tfrac{1}{a_n}\right) = +\infty$.

B3.* Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^5(\mathbb{R})$ e sia $P_4(x,1) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$ il suo polinomio di Taylor di grado 4 centrato in $x_0 = 1$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ f è decrescente in un intorno di $x_0 = 1$. $\boxed{\text{B}}$ f è crescente in un intorno di $x_0 = 1$. $\boxed{\text{C}}$ f è un polinomio. $\boxed{\text{D}}$ $f(0) = 1$

B4. Sia $f\colon [8,12] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 in $[8,12]$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\exists \xi \in (8,12)$ tale che $f'(\xi) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists \xi \in (8,12)$ tale che $f''(\xi) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ f non può essere monotona. $\boxed{\text{D}}$ f' ha massimo e minimo in $[8,12]$.

B5. Si consideri la funzione $f(x) = 1 - e^{x^2}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $xf(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$.

B6. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni crescenti e tali che $g(0) = 1$ e $f(x) > g(x)$ per x abbastanza grande. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) > \lim_{x\to+\infty} g(x)$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 1$.

B7.* Sia data la successione $\{a_n\}$ con $n \geq 1$ definita da $a_{n+1} = e^{a_n} - 1$, $a_1 = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -4$. $\boxed{\text{B}}$ La successione è monotona decrescente. $\boxed{\text{C}}$ La successione è monotona crescente. $\boxed{\text{D}}$ La successione è indeterminata.

B8. Si considerino $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\forall\, x \in \mathbb{R}$ risulti $|f(x)| \leq 4$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua in tutto $\mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ fg è continua in tutto $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ fg è continua in $x = 0$. $\boxed{\text{C}}$ Se $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x) = 1$, la funzione fg è continua in $x = 1$. $\boxed{\text{D}}$ Se $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x) = 0$, la funzione fg è continua in $x = 1$.