Analisi Matematica I - 27/01/22 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Siano $w_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$ e $z_0 = 2e^{i\pi}w_0$. Scrivere in forma esponenziale le soluzioni della seguente equazione in $\mathbb{C}$: $(z^3 - z_0)(z\bar{z} + 2) = 0$.

A2. Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 5u'(t) - 6u(t) = 7e^{6t}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 8. \end{cases}$$

A3. Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)$. Scrivere il Polinomio di Taylor di ordine 2 relativo a f centrato nel punto 2.

A4. Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(-2x) + \frac{1}{2}\ln(1 - 4x^2)}{\arctan\left(\frac{4x^4}{24}\right)}$.

A5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + (2x)^3 + 6\arctan x$. Determinare il valore di $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e di $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

A6.* Studiare, al variare del parametro $b \geq 0$, il carattere della seguente serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(e^{\frac{2}{k}} - 1 - \frac{2}{k})b^k}{\cosh(7k) + \cos k + 1}$.

A7. Determinare il minimo assoluto m della funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2 - 2) - 2\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

A8.* Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_0^9 \frac{(9-x)^{2\alpha}\ln(10-x)}{e^{\sin x}(\sinh(x) - x)^\alpha}dx$ converge in senso generalizzato.

B1.* Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 = 0$ e tale che $f(0) = 1$ e $f'(0) < 0$. Allora $\boxed{A}$ Esiste $\delta > 0$ tale che f è derivabile in $(-\delta, \delta)$. $\boxed{B}$ Esiste $\delta > 0$ tale che f è continua in $(-\delta, \delta)$. $\boxed{C}$ Esiste $\delta > 0$ ed esiste $x \in (-\delta, 0)$ tale che $f(x) < 1$. $\boxed{D}$ Esiste $\delta > 0$ ed esiste $x \in (0, \delta)$ tale che $f(x) < 1$.

B2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ converge, allora $\boxed{A}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. $\boxed{B}$ $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$. $\boxed{C}$ Anche $\sum_{n=0}^{\infty} |\ln(1 + a_n)|$ converge. $\boxed{D}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste.

B3. Dati $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, allora $\boxed{A}$ $|z_1|+|z_2| < |z_1+z_2|$. $\boxed{B}$ $|z_1+z_2| < z_1+z_2$. $\boxed{C}$ $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. $\boxed{D}$ $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

B4.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) \sim x^2$, per $x \to 0$. Allora $\boxed{A}$ f è continua in 0. $\boxed{B}$ se f è continua in 0 allora è derivabile in 0. $\boxed{C}$ $f(x) = o(x^2)$, per $x \to 0$. $\boxed{D}$ f è derivabile in 0.

B5. Sia $F(x) = x \int_0^x \sin(t^2)dt$. Allora F è una soluzione dell'equazione differenziale

$\boxed{A}$ $xy'(x) = y(x)+x\sin(x^2)$. $\boxed{B}$ $xy'(x) = y(x)+x^2\sin(x^2)$. $\boxed{C}$ $y'(x) = xy(x)+\sin(x^2)$. $\boxed{D}$ $xy'(x)+y(x) = x\sin(x^2)$.

B6. Data f di classe $C^2(\mathbb{R})$, sia $P_2(x, x_o)$ il Polinomio di Taylor di ordine 2 relativo a f centrato nel punto x_o. Allora $\boxed{A}$ $P''(x_o, x_o) = 0$. $\boxed{B}$ $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - P_2(x, x_o)}{(x - x_o)^2}$ non si può calcolare. $\boxed{C}$ $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - P_2(x, x_o)}{(x - x_o)^2} = 0$. $\boxed{D}$ $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - P_2(x, x_o)}{(x - x_o)^2} = 1$.

B7. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\boxed{A}$ $\forall x \in I$ si ha che $f(x) < \sup_{t\in I} f(t)$. $\boxed{B}$ $\forall x \in I$ si ha che $f(x) \geq \inf_{t\in I} f(t)$. $\boxed{C}$ f ha massimo e minimo. $\boxed{D}$ f è illimitata.

B8. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che per ogni $M > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M$. Allora $\boxed{A}$ nessuna delle precedenti è vera. $\boxed{B}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{C}$ M è minorante per $\{a_n\}$. $\boxed{D}$ $\sup\{a_n\} = +\infty$.