1

Analisi Matematica 1 - 29/02/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)\left[\tanh\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^{2\alpha}}{(\cos(n)-4)[\ln(2^n+1)]^{2\alpha}}$:

A2. * Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = (e^{7x^2}+3)\cos x$.

A3. Calcolare $I = \displaystyle\int_7^{+\infty} e^{-2x}(x-7)\,dx$.

A4. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sinh(\ln x)+2x}{(x\ln x)\left(e^{\frac{7}{\ln x}}-1\right)}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2\sin n+7\cos n}{\cosh n}+n\left(\tan\left(\frac{2}{n}\right)+\arctan\left(\frac{2}{n}\right)\right)\right]$

A5. Scrivere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione $z^2 = 36i$:

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2+12z+36-i=0$:

A6. Data la funzione $f\colon (-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita come: $f(x) = 6e^x + 6\tanh(x) + \ln(1+x)$, calcolare $f^{-1}(6)$: $(f^{-1})'(6)$:

A7. Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = e^{-2x}(x^2-6^2)$.

Determinare l'ascissa x_m dove f assume il minimo assoluto.

Determinare l'ascissa x_M dove f assume il massimo assoluto.

A8*. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $y''+4y=0$.

Trovare una soluzione dell'equazione completa $y''+4y = \dfrac{1}{2}\cos(2t)$

B1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, e si consideri $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \arctan f(x)$. Allora $\boxed{A}$ $\lim_{x\to b} g(x) = \frac{\pi}{2}$. $\boxed{B}$ g ha massimo e minimo assoluti in $[a,b]$. $\boxed{C}$ g ha massimo assoluto in $[a,b]$, ma non ha minimo assoluto in $[a,b]$. $\boxed{D}$ g ha minimo assoluto in $[a,b]$, ma non ha massimo assoluto in $[a,b]$.

B2. Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Allora $\boxed{A}$ $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n) = 0$. $\boxed{B}$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N_1$ risulta $-1 < a_n < 1$. $\boxed{C}$ $\exists N_o \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N_o$ risulta $a_n > 0$. $\boxed{D}$ $\exists N_o \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N_o$ risulta $a_n < 0$.

B3. Siano $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$ e $f(z) \sim \arctan z$ per $z \to +\infty$. Allora:
$\boxed{A}$ $f(z)g(\frac{1}{z}) = o(z)$ per $z \to +\infty$. $\boxed{B}$ $g(x)f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{C}$ $g(x)f(\frac{1}{x}) = o(x)$ per $x \to 0^+$. $\boxed{D}$ $g(\frac{1}{z})f(z) \sim \frac{\arctan z}{z}$ per $z \to +\infty$.

B4* Siano $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e $g(0) = 1$. Allora:
$\boxed{A}$ Se $\lim_{x\to 5} g(f(x)) = 1$, allora $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$. $\boxed{B}$ Se $f(5) = 0$, allora $\lim_{x\to 5} g(f(x)) = 1$. $\boxed{C}$ $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1$. $\boxed{D}$ Non esiste il limite $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

B5* Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ tale che $|f'(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{A}$ $|f(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{B}$ Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x + a$. $\boxed{C}$ $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{D}$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

B6. Sia $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $F(x) = \int_0^x \arctan(t)\, dt$. Allora: $\boxed{A}$ F è limitata. $\boxed{B}$ Esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che F non è derivabile in x_0. $\boxed{C}$ $F''(x) = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{D}$ F è crescente.

B7. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(\pi n)}{n^{1/3}} \cdot \sin\frac{1}{n}$. Allora $\boxed{A}$ La serie converge semplicemente ma non assolutamente. $\boxed{B}$ La serie converge assolutamente. $\boxed{C}$ $\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{2+\cos(\pi n)}{n^{1/3}} \cdot \sin\frac{1}{n}$. $\boxed{D}$ La serie diverge.

B8. Sia f una funzione di classe $C^3(\mathbb{R})$ e sia $x + 4x^3$ il suo polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in 0. Allora: $\boxed{A}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{25}{6}$. $\boxed{B}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{15}{6}$. $\boxed{C}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sin(x)}{x^3} = 4$. $\boxed{D}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{11}{6}$.