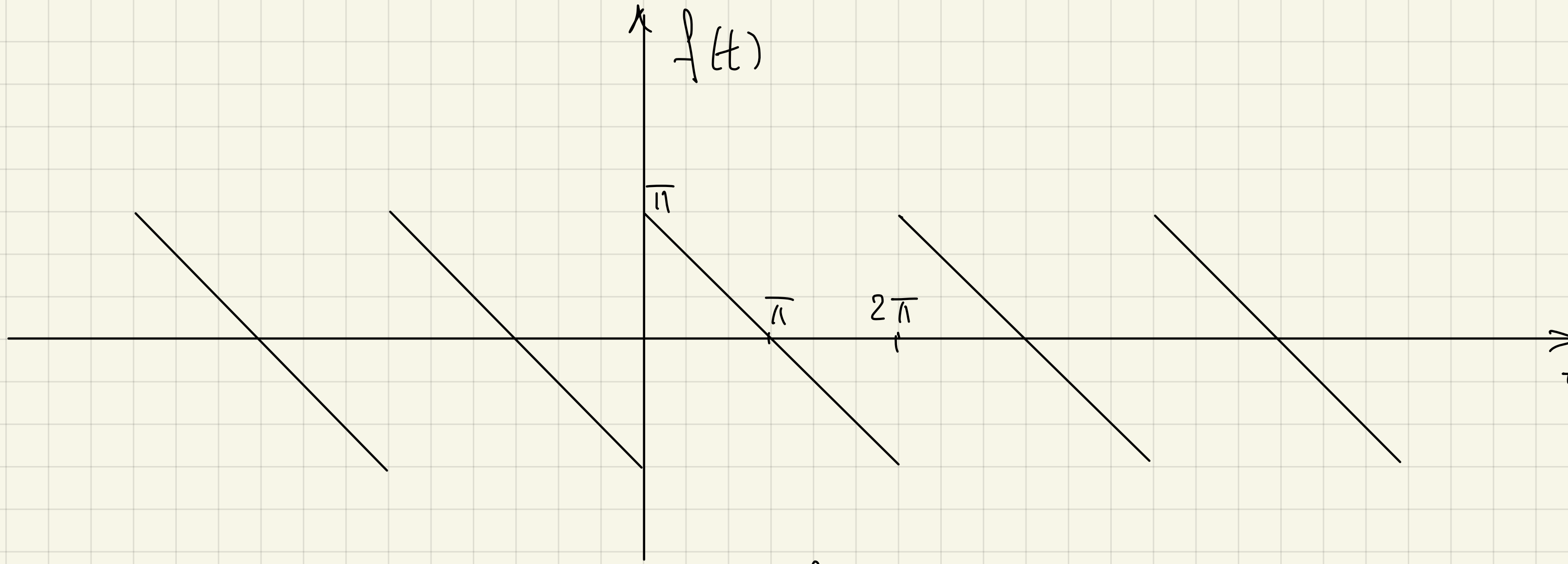
① $f(t) = \pi - t$ quando $t \in (0, 2\pi]$, 2π-periodica.

a)



E' evidente dal grafico che $f \in L^2(-\pi, \pi)$; inoltre, dal grafico risulta essere dispari. Pertanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^{\pi} (\pi - t)^2 dt$$

$$= 2\left[-\frac{(\pi-t)^3}{3}\right]_0^{\pi} = 2\frac{\pi^3}{3}.$$

Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$ è sicuramente sviluppabile in serie di Fourier.

b) Poiché f è dispari, abbiamo $a_0 = a_n = 0$.

Inoltre

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-\pi+t)\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^{\pi} - \cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n}\,dt}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(+\pi\,\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

Pertanto

$$S(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nt$$

c) La serie converge alla funzione nel senso dell'energia, ossia $\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-S_N(t)|^2\,dt = 0$, dove S_N è la somma parziale ennesima.

Inoltre, $\forall\, t \neq 2n\pi$, f è continua e derivabile; perciò

$$S(t) = f(t)$$

In $t_n = 2n\pi$ f ha un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del salto sono finite. Pertanto

$$S(t_n) = \frac{f(t_n^+) + f(t_n^-)}{2} = 0$$

In questo caso, poi, non c'è convergenza uniforme della serie in $[-\pi, \pi]$.

<u>d)</u> Dai risultati precedenti, abbiamo

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

da cui

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)\pi/2}{2k+1} + \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \cancel{2}k\frac{\pi}{\cancel{2}}}{2k}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{2k+1}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \sin (2k+1)\frac{\pi}{2} = (-)^k$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \sin k\pi = 0$$

e) Dall'identità di Parseval otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

da cui concludiamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$ dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Determiniamo autovalori ed autovettori di A.

$\det(\lambda I - A) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \lambda^2 - \lambda - 2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ $\quad (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$ $\quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2.$

$\lambda_1 = 3$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \alpha + 2\beta = 0$

$\beta = 1, \quad \alpha = -2$

Pertanto, possiamo porre $\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = -2$ $\quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad 2\alpha - \beta = 0$

$\alpha = 1, \quad \beta = 2$

Pertanto, possiamo porre $\underline{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Concludiamo che l'integrale generale del sistema omogeneo associato è

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} -2e^{3x} & e^{-2x} \\ e^{3x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Determiniamo un integrale particolare del sistema completo, utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Abbiamo

$$Z(x) = \begin{bmatrix} -2e^{3x} & e^{-2x} \\ e^{3x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix} \qquad W(x) = -4e^{x} - e^{x} = -5e^{x}$$

$$Z^{-1}(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}\begin{bmatrix} 2e^{-2x} & -e^{-2x} \\ -e^{3x} & -2e^{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}e^{-3x} & +\frac{1}{5}e^{-3x} \\ +\frac{1}{5}e^{2x} & +\frac{2}{5}e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}^{-1}(x)\,\underline{b} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}e^{-3x} & \frac{1}{5}e^{-3x} \\ \frac{1}{5}e^{2x} & \frac{2}{5}e^{2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}e^{-3x} \\ -\frac{2}{5}e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}(x)\int \underline{Z}^{-1}\,b\,dx = \begin{bmatrix} -2e^{3x} & e^{-2x} \\ e^{3x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix}\int \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}e^{-3x} \\ -\frac{2}{5}e^{2x} \end{bmatrix} dx$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{3x} & e^{-2x} \\ e^{3x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +\frac{1}{15}e^{-3x} \\ -\frac{1}{5}e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{15}-\frac{1}{5} \\ \frac{1}{15}-\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{15} \\ -\frac{5}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Quindi, l'integrale generale del sistema completo è

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -2e^{3x} & e^{-2x} \\ e^{3x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Infine, se imponiamo la condizione iniziale, abbiamo

$$\begin{bmatrix} -2e^{3\ln 2} & e^{-2\ln 2} \\ e^{3\ln 2} & 2e^{-2\ln 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2\cdot 8 & \frac{1}{4} \\ 8 & 2\cdot\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -16C_1 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{3} \\ 8C_1 + \frac{1}{2}C_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{4}C_2 = \frac{5}{3} \implies C_2 = 4/3 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Quindi, l'integrale particolare soluzione del Problema di Cauchy è

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -2e^{3x} & e^{-2x} \\ e^{3x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

(3) $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} \arcsin\left(\frac{y}{2x}\right)$

a) Osserviamo che deve essere $f, f_y \in C^0(\Omega)$. Pertanto

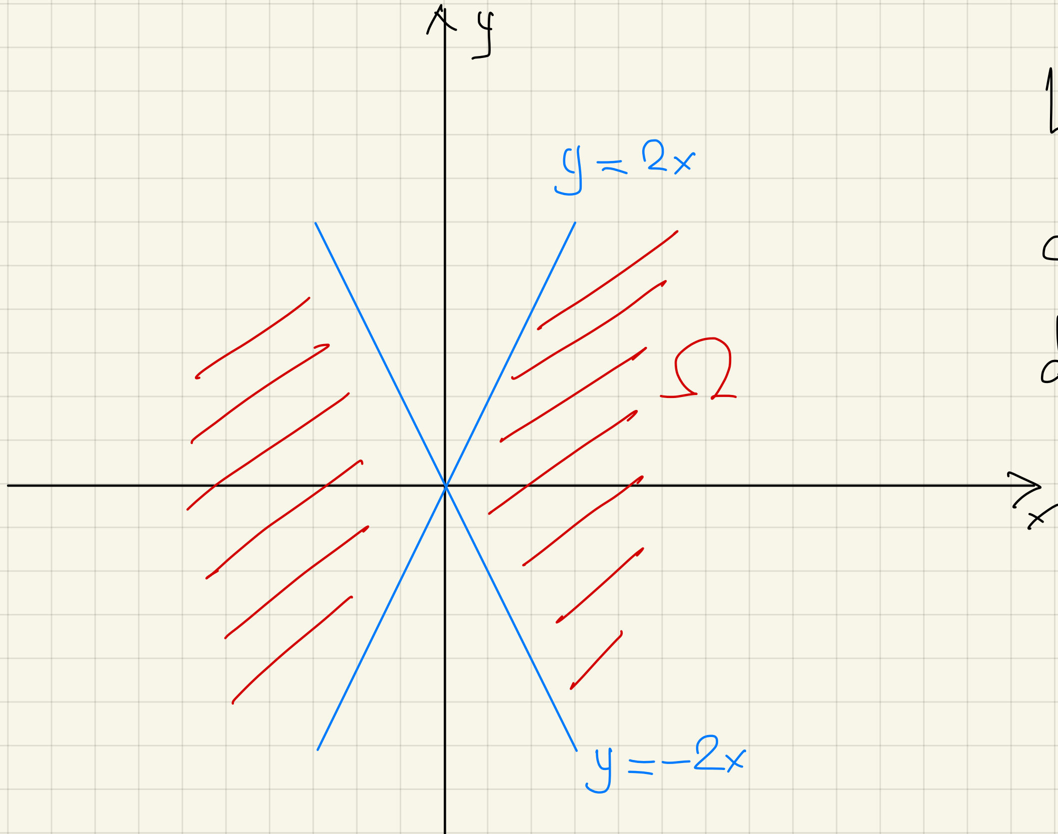
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 4 - \frac{y^2}{x^2} > 0 \\ -1 < \frac{y}{2x} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ y^2 - 4x^2 < 0 \\ -1 < \frac{y}{2x} < 1 \end{cases}$$

Da $-1 < \frac{y}{2x} < 1$ otteniamo che

1) $-2x < y < 2x$ se $x > 0$

2) $2x < y < -2x$ se $x < 0$

ed analoga condizione si ricava da $y^2 - 4x^2 < 0$.
Il dominio Ω è, dunque, l'aperto tratteggiato in figura.



Le rette $y=2x$ e $y=-2x$ costituiscono la frontiera dell'aperto Ω, ma non ne fanno parte.

b) Per quanto riguarda l'integrale generale, dalla sostituzione indicata otteniamo

$$x t' + \cancel{t} = \cancel{t} + \sqrt{4-t^2}\,\arcsin\frac{t}{2}$$

$$t' = \frac{1}{x}\left[\sqrt{4-t^2}\,\arcsin\frac{t}{2}\right]$$

Si tratta di una equazione a variabili separabili;

Da $T(t) = \sqrt{4-t^2}\,\arcsin\frac{t}{2} = 0$, ricaviamo

$$t = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0$$

$$t = \pm 2 \qquad\qquad\qquad y = \pm 2x$$

Osserviamo che $y = 0$ è un integrale particolare, perché il suo grafico è contenuto in Ω, mentre $y = \pm 2x$ <u>non</u> sono integrali particolari, perché i loro grafici costituiscono la <u>frontiera</u> di Ω.

Separando le variabili, abbiamo

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}\,\arcsin\frac{t}{2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\arcsin\frac{t}{2}}\,\frac{dt}{2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \arcsin \frac{t}{2} = \ln kx$$

dove k è una costante arbitraria diversa da zero, e infine

$$\arcsin \frac{t}{2} = kx$$

Quindi, la totalità delle soluzioni dell'equazione data è

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = \pm 2x, \\ \arcsin \dfrac{y}{2x} = kx, \qquad k \neq 0. \end{cases}$$

Grazie al Teorema di Dini, non serve esplicitare la famiglia di linee rispetto a y.

c) Infine, imponendo il passaggio per il punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ abbiamo

$$\arcsin \frac{\frac{\pi}{2}}{2\frac{\pi}{2}} = k\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = k\frac{\pi}{2} \implies \frac{\pi}{6} = k\frac{\pi}{2} \implies k = \frac{1}{3}$$

Quindi l'integrale particolare cercato è

$$\arcsin \frac{y}{2x} = \frac{x}{3}$$

da cui, esplicitando (si può verificare che è qui possibile)

$$y = 2x \sin \frac{x}{3}.$$

(4) $z^4 + xz^3 - y^2 - 1 = 0$ $\qquad$ $P(0,0,1)$

Posto $f(x,y,z) = z^4 + xz^3 - y^2 - 1$ è evidente che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Inoltre

$$f(0,0,1) = 1 - 1 = 0$$

$$f_z = 4z^3 + 3xz^2 \qquad f_z(0,0,1) = 4 \neq 0$$

Tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate e pertanto possiamo concludere che f è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno di P.

Quanto al piano tangente alla superficie in P, esso ha equazione

$$f_x(P)\,x + f_y(P)\,y + f_z(P)\,(z-1) = 0.$$

Poiché

$$f_x = z^3 \qquad f_x(0,0,1) = 1$$

$$f_y = -2y \qquad f_y(0,0,1) = 0$$

concludiamo che il piano tangente cercato è

$$x + 4(z-1) = 0$$

$$x + 4z - 4 = 0$$

---

5 Cerchiamo il massimo ed il minimo assoluto di

$$f = 3y - 4z + 2 \qquad \text{su}$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 8x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}.$$

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{9/8} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Si tratta di un ellissoide, che è un insieme chiuso e limitato. Poiché f è continua su E, per il Teorema di Weierstrass il massimo ed il minimo assoluto esistono certamente.

Poiché $\nabla f = (0, 3, -4) \neq 0$, il massimo ed il minimo assoluti non possono essere interni ad E, ma necessariamente sono assunti su ∂E. Per questo, possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Posto $\mathcal{L} = 3y - 4z + 2 + \lambda(8x^2 + y^2 + z^2 - 9)$,

abbiamo

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \mathcal{L}_z = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 16\lambda x = 0 \\ 3 + 2\lambda y = 0 \\ -4 + 2\lambda z = 0 \\ 8x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Dalla I equazione, ricaviamo $x = 0$ ($\lambda = 0$ non è accettabile). Abbiamo poi dalle altre equazioni

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2\lambda} \\ z = \dfrac{2}{\lambda} \\ \dfrac{9}{4\lambda^2} + \dfrac{16}{4\lambda^2} = 9 \end{cases} \qquad \lambda^2 = \frac{25}{4 \cdot 9} \qquad \lambda = \pm\frac{5}{6}$$

da cui

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{5}{6} \\[2ex] y = -\dfrac{3}{\cancel{2}^{1} \cdot \dfrac{5}{\cancel{6}_{3}}} = -\dfrac{9}{5} \\[2ex] z = \dfrac{2}{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{12}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{5}{6} \\[2ex] y = \dfrac{9}{5} \\[2ex] z = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

Sostituendo (qui si può evitare di applicare la C.S.) otteniamo

$$f\left(0, \frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right) = 3 \cdot \frac{9}{5} - 4\left(-\frac{12}{5}\right) + \frac{10}{5} = \frac{85}{5} = 17$$

$$f\left(0, -\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) = 3\left(-\frac{9}{5}\right) - 4\left(\frac{12}{5}\right) + \frac{10}{5} = -13$$

Quindi $m = -13$ e $M = 17$.