1) f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$, per cui la derivata direzionale richiesta esiste sicuramente.
Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(1,1)}{t}$$

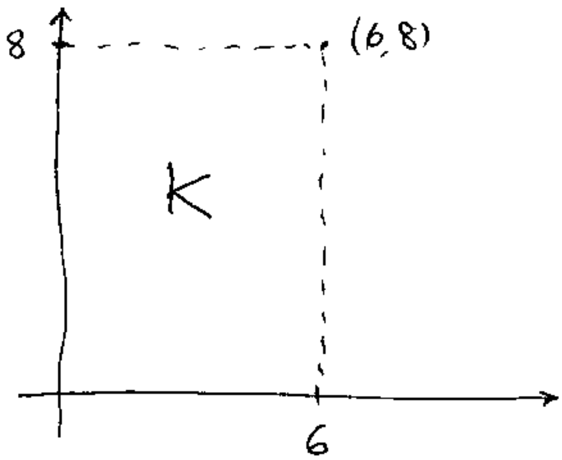
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 - \operatorname{artg} 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}t = 0.$$

---

2) Osserviamo che la funzione $f \geq 0$. Poichè $f(0,0) = 0$ e $(0,0) \in K$, concludiamo che

$$\min_K f = 0.$$



Inoltre, applicando la CN, abbiamo

$$\nabla f = 0 \qquad \begin{cases} 8x = 0 \\ 18y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

che è il punto di minimo. Dunque il massimo è necessariamente assunto sul bordo.

$$\partial K = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4$$

$$\ell_1 : \begin{cases} x \in [0,6] \\ y = 0 \end{cases} \qquad f\Big|_{\ell_1} = 4x^2 \qquad M_1 = 4 \cdot 36 = 144$$

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 6 \\ y \in [0,8] \end{cases} \qquad f\Big|_{\ell_2} = 144 + 9y^2 \qquad M_2 = 144 + 9 \cdot 64 = 720$$

$$\ell_3 : \begin{cases} x \in [0,6] \\ y = 8 \end{cases} \qquad f\Big|_{\ell_3} = 4x^2 + 576 \qquad M_3 = 4 \cdot 36 + 576 = 720$$

$$\ell_4 : \begin{cases} x = 0 \\ y \in [0,8] \end{cases} \qquad f\Big|_{\ell_4} = 9y^2 \qquad M_4 = 576$$

Quindi

$$\underset{k}{\mathrm{Max}}\ f = 720$$

---

(3) Consideriamo l'equazione caratteristica. Abbiamo

$$\alpha^2 + 10\alpha + 50 = 0$$
$$(\alpha + 5)^2 = -25$$
$$\alpha = -5 \pm 5i$$

Dunque, l'integrale generale sarà

$$y = e^{-5x}\left[C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right] + y_p$$

con

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x$$

Derivando è

$$y_p' = 2Ax + B + De^x$$
$$y_p'' = 2A + De^x.$$

Sostituendo

$$2A + De^x + 20Ax + 10B + 10De^x +$$
$$+ 50Ax^2 + 50Bx + 50C + 50De^x = x^2 + e^x.$$

Uguagliando membro a membro, otteniamo

e^x : $\quad 61\,D = 1 \quad \Longrightarrow \quad D = 1/61$

x^2 : $\quad 50\,A = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 1/50$

x : $\quad \cancel{20}\,\frac{1}{\cancel{50}} + 50B = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{1}{125}$

1 : $\quad \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{50}_{25}} - \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{125}_{25}} + 50\,C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{1250}$

Quindi l'espressione completa dell'integrale generale è

$$y = e^{-5x}\left[C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right] + \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{125}x$$

$$+ \frac{1}{1250} + \frac{1}{61}e^x$$

L'I.G. è definito su tutto $\mathbb{R}$ e questo era prevedibile in base alla teoria, perché si può applicare il Teorema di esistenza ed unicità in grande in un intervallo $[a,b]$ arbitrario.

---

(4) Abbiamo

$$d\sigma_2 = \sqrt{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2}\, du\,dv$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} -v\sin u & v\cos u \\ \cos u & \sin u \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v\cos u & 0 \\ \sin u & 2v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -v\sin u \\ 2v & \cos u \end{vmatrix}^2}\, du\,dv$$

$$= \sqrt{v^2 + 4v^4\cos^2 u + 4v^4 \sin^2 u}\; du\,dv$$

$$= \sqrt{4v^4 + v^2}\, du\, dv = |v|\sqrt{1+4v^2}\, du\, dv$$

Perciò

$$\int_{\Sigma} \frac{e^{\operatorname{arctg} y/x}}{\sqrt{1+4z}}\, d\sigma_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} du \int_1^2 \frac{e^{\operatorname{arctg} \operatorname{tg} u}}{\sqrt{1+4v^2}}\, v\sqrt{1+4v^2}\, du\, dv$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^u\, du \int_1^2 v\, dv = \left[e^u\right]_{\ln 2}^{\ln 3} \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2$$

$$= (3-2)\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

---

(5) Utilizzando il criterio della radice

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{3\ln(2n+1)}{n}} = 1$$

Quindi il raggio di convergenza è 1 e sicuramente la serie converge semplicemente ed assolutamente per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$$-1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

Consideriamo la convergenza assoluta agli estremi.

In $x = 2$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$.

In $x=0$ abbiamo ancora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$.

Tale serie converge, perché si tratta di una serie armonica generalizzata con $\alpha = 3 > 1$. Poiché abbiamo convergenza assoluta agli estremi, avremo anche convergenza semplice e, pertanto, possiamo concludere che

$$I = J = [0,2]$$

---

(6) Si tratta certamente di un arco regolare, perché $r \in C^\infty([0,1])$, $r' = (1, e^t, \sqrt{2}\, e^{t/2})$ non si annulla mai in $[0,1]$ e la curva è semplice.

Passiamo al calcolo della lunghezza

$$\sigma_1(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t} + 2e^t}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(e^t+1)^2}\, dt = \int_0^1 (e^t + 1)\, dt = \left[e^t + t\right]_0^1$$

$$= e + 1 - 1 = e.$$

---

(7) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$.

Inoltre

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2+1-2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$f_y = 4y^3 + 2y$$

$$f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\left(\cancel{2}\,\frac{\sqrt{2}-\cancel{1}}{\cancel{2}} + \cancel{1}\right) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\sqrt{2} = 2\sqrt{\sqrt{2}-1} \neq 0$$

Pertanto possiamo applicare il Teorema di Dini e concludere che l'equazione è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno di P.

Quanto alla retta tangente, la sua espressione è

$$f_x(P)(x - x_P) + f_y(P)(y - y_P) = 0$$

Poichè

$$f_x = 4x^3 - 2x$$

$$f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) = \frac{4}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$

concludiamo che l'equazione è

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

---

(8) Abbiamo

$$\int_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{\frac{1-x^2}{4}} xy\,dy = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{\frac{1-x^2}{4}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[\frac{x^4-2x^2+1}{16} - (x^4-2x^2+1)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left(-\frac{15}{16}\right)(x^4 - 2x^2 + 1)\, dx$$

$$= -\frac{15}{32}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{2}{4}x^4 + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{15}{32}\left[\frac{1}{6} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -\frac{\cancel{15}\,5}{32 \cdot \cancel{6}\,2} = -\frac{5}{64}$$