PARTE A

① $f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \sqrt{(x-2)^3}$

$$f(4) = \sqrt{(4-2)^3} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-2)^{1/2}, \quad f'(4) = \frac{3}{2}(4-2)^{1/2} = \frac{3}{2}\,2^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(x-2)^{-1/2}, \quad f''(4) = \frac{3}{4}(4-2)^{-1/2} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi

$$P_2(x; 4) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{1}{2} f''(4)(x-4)^2$$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,(x-4) + \frac{3}{8\sqrt{2}}(x-4)^2$$

---

② $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{7x}$; $\lim_{x \to 1^+} x \left(\frac{\sin(x-1) - \sinh(x-1)}{[\arctan(x-1)]^3} \right)$

Abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{7x} = \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-7} = e^{-7}$$

$$\lim_{x \to 1^+} x \left(\frac{\sin(x-1) - \sinh(x-1)}{[\arctan(x-1)]^3} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)} - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \cancel{(x-1)} - \frac{1}{6}(x-1)^3}{(x-1)^3} =$$

$$= - \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{3}\cancel{(x-1)^3}}{\cancel{(x-1)^3}} = -\frac{1}{3}.$$

---

3 $f : (0, +\infty) \setminus \{7\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \dfrac{x-2}{\ln\left(\frac{x}{7}\right)}$.

Scrivere l'equazione della retta tangente in $x_0 = 2$.

Abbiamo

$$f(2) = \frac{2-2}{\ln\frac{2}{7}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\ln\frac{x}{7} - \frac{x-2}{x}}{\ln^2\frac{x}{7}}, \qquad f'(2) = \frac{\ln\frac{2}{7}}{\ln^2\frac{2}{7}} = \frac{1}{\ln\frac{2}{7}}$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente è

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$y = \frac{1}{\ln\frac{2}{7}}(x-2)$$

---

(4) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{n^\alpha} - 1\right)\sqrt[7]{n}.$$

Posto

$$a_n = \left(e^{n^\alpha} - 1\right)\sqrt[7]{n},$$

osserviamo che

$$\alpha = 0 \implies a_n = (e-1)\sqrt[7]{n} \;\not\xrightarrow[n\to\infty]{}\; 0$$

$$\alpha > 0 \implies a_n = \left(e^{n^\alpha} - 1\right)\sqrt[7]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

In questi due casi, dunque è violata la CN di convergenza e la serie non può convergere.

Se, invece, $\alpha < 0$, abbiamo

$$a_n = \left(e^{\frac{1}{n^{|\alpha|}}} - 1\right)\sqrt[7]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Osserviamo, poi che

$$\left(e^{\frac{1}{n^{|\alpha|}}} - 1\right)\sqrt[7]{n} = \left(\cancel{1} + \frac{1}{n^{|\alpha|}} + \dots \cancel{-1}\right) n^{1/7} = \frac{1}{n^{|\alpha| - 1/7}}$$

Affinché la serie converga, dovrà essere

$$|\alpha| - \frac{1}{7} > 1$$

Poiché $\alpha < 0$, abbiamo

$$-\alpha - \frac{1}{7} > 1$$

$$\alpha < -1 - \frac{1}{7} \implies \alpha < -\frac{8}{7}$$

---

(5) Sia $w = 1+2i$. Calcolare $A = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right)$.
Risolvere quindi in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^5 = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Abbiamo

$$A = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1\cancel{-2i} + 1 \cancel{+2i}}{1+4}\right) = \frac{2}{5}$$

Pertanto
$$A = \frac{2}{5}$$
e dobbiamo risolvere
$$z^5 = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
cioè
$$z^5 = \frac{2}{5}\, e^{i\pi/4}$$

Otteniamo
$$z = \sqrt[5]{\frac{2}{5}}\; e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

---

(6) Data $f(x) = \dfrac{(x-6)^2+1}{(x-6)^2-1}$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{7, 5\}$, calcolare $\sup f$, $\inf f$; trovare eventuali punti di max e minimo, e dire se sono punti di massimo e minimo locali o globali.

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$f(x) = \frac{(x-6)^2+1}{(x-7)(x-5)}$$

Abbiamo poi

$$\lim_{x \to 7^+} f(x) = +\infty \implies \sup f = +\infty$$

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = -\infty \implies \inf f = -\infty$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{2(x-6)(x-7)(x-5) - (2x-12)\left[(x-6)^2+1\right]}{(x-7)^2(x-5)^2}$$

$$= \frac{2(x-6)\left[\cancel{x^2} \cancel{-12x} + 35 \cancel{-x^2} \cancel{+12x} - 37\right]}{(x-7)^2(x-5)^2}$$

$$= -\frac{4(x-6)}{(x-7)^2(x-5)^2}$$

Osserviamo che

$$f'(x) \geq 0 \qquad -\frac{4(x-6)}{(x-5)^2(x-7)^2} \geq 0$$

$$x \leq 6$$

	6	
$+$		$-$
$\nearrow$		$\searrow$

Quindi $x = 6$ è punto di massimo locale. Non esistono, infatti, massimi o minimi globali, perché f non è limitata, né superiormente, né inferiormente

---

(7) Trovare una primitiva di $f(x) = \arctan(2x) + \frac{1}{(x+2)(x+6)}$ per $x \geq 0$.

Una primitiva è data da

$$F(x) = \int \left[\arctan(2x) + \frac{1}{(x+2)(x+6)}\right] dx$$

$$= x \arctan(2x) - \int \frac{x}{1+4x^2}\, dx$$

$$+ \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+6}\right) dx$$

Abbiamo

$$A = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x+6} = 1/4$$

$$B = \lim_{x \to -6} \frac{1}{x+2} = -1/4$$

Pertanto

$$F(x) = x \arctan(2x) - \frac{1}{8} \ln(1+4x^2) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x+2}{x+6}\right)$$

(8) Trovare una soluzione del Pb di Cauchy in $[1,+\infty)$

$$\begin{cases} u' + \frac{7}{t} u = \frac{\cos(t^7)}{t} \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo

$$u(t) = e^{-7\int \frac{1}{t}dt} \left[C + \int \frac{\cos(t^7)}{t} e^{7\int \frac{1}{t}dt} dt \right]$$

$$= e^{-7\ln t} \left[C + \int \frac{\cos t^7}{t} e^{7\ln t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{t^7} \left[C + \int \frac{\cos t^7}{t} t^7 dt \right]$$

$$= \frac{1}{t^7} \left[C + \frac{1}{7}\int 7t^6 \cos t^7 dt \right]$$

$$= \frac{1}{t^7} \left[C + \frac{1}{7} \sin t^7 \right]$$

Imponendo la condizione iniziale, abbiamo

$$1 = 1\left[C + \frac{\sin 1}{7} \right]$$

$$C = 1 - \frac{\sin 1}{7}$$

Pertanto, la soluzione cercata è

$$u(t) = \frac{1}{t^7}\left[1 - \frac{\sin 1}{7} + \frac{\sin t^7}{7} \right]$$

PARTE B

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Allora, per le proprietà del limite, è anche

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$$

Nella definizione di limite, scelto $\varepsilon = \frac{|L|}{3}$, abbiamo che $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x$ che soddisfi $0 < |x - x_0| < \delta$

risulta

$$\big| |f(x)| - |L| \big| < \frac{|L|}{3}$$

cioè

$$-\frac{|L|}{3} < |f(x)| - |L| < \frac{|L|}{3}$$

ossia

$$|L| - \frac{|L|}{3} < |f(x)| < |L| + \frac{|L|}{3}$$

$$\frac{2}{3}|L| < |f(x)| < \frac{4}{3}|L|$$

che è la risposta $\boxed{C}$

---

(2) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua e strettamente positive in $[0, \pi]$ e $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definita da $g(x) = f(x) \cdot$ $\cdot \sin x$.

Osserviamo che g è continua in $[0, \pi]$, si annulla in $x = 0$ e in $x = \pi$ e in $(0, \pi)$ è positiva. Allora per il Teorema di Weierstrass il minimo esiste sicuramente e per quanto visto ora deve necessariamente essere 0.

---

③ Sia $\{a_n\}$ un successione a valori reali negativi, tale che $|a_n| \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$.

Se consideriamo

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

è immediato verificare che $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ e $\boxed{D}$ sono false

D'altro canto, per $a_n \to 0$, abbiamo

$$\sin^2 a_n \sim a_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$$

e la serie in tal caso converge. Quindi $\boxed{C}$ è corretta.

---

(4) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e che ha almeno un punto stazionario in (a,b).

Ciò implica per definizione di punto stazionario, che $\exists\ \xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$, che è la risposta $\boxed{C}$.

(5) Sia data la successione $\{a_n\}$ con $a_n > 0$ $\forall\, n \geq 1$ e tale che $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ finito.

Per i teoremi sui limiti, non può che essere

$$L \geq 0,$$

che è la risposta $\boxed{A}$.

---

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e sia $P_2(x; 2) = 2 + x^2$

Per le proprietà del Polinomio di Taylor, avremo necessariamente che

$$P_2(2) = f(2) \implies f(2) = 6$$

$$P_2'(2) = f'(2) \implies f'(2) = 4$$

$$P_2''(2) = f''(2) \implies f''(2) = 2$$

Quindi $6 = f(2) = 3 \cdot 2 = 3 f''(2)$ e la risposta corretta è $\boxed{D}$.

---

(17) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \sim e^x$ per $x \to \pm\infty$.

Poiché
$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$$
converge, per il Criterio del Confronto asintotico, anche $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$ converge, cioè $\boxed{D}$.

Osserviamo che $\boxed{B}$ non è corretta, perché f potrebbe annullarsi in $(0, +\infty)$.

(8) Sia $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin x}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}\right)$$

$$= 0 \cdot 0 = 0$$

Quindi la risposta corretta è $\boxed{C}$.