Soluzioni della prova del 03/03/22

Parte A

A1. Si controlla che

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + e^{\frac{x}{2x-2}} \frac{2}{(2x-2)^2} > 0, \qquad \text{per ogni } x \in (1, +\infty),$$

dunque f è invertibile nel suo dominio. Chiaramente l'unico x tale che $f(x) = \ln 4 - e$ è $x = 2$. Dalla formula della derivata della funzione inversa, si conclude

$$(f^{-1})'(\ln 4 - e) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{4}{1+2e}.$$

A2. Si vede facilmente che la funzione è illimitata sia dall'altro che dal basso, quindi ci possono essere solo massimi/minimi relativi (o flessi). Si calcola la derivata $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)$ e si deduce che il punto di massimo relativo è $x_M = -2$ e che il punto di minimo relativo è $x_m = 1$.

A3. Chiaramente $\arctan n$ non dà contributo alla convergenza o divergenza e tutto sta nello studiare il termine $(2q)^n$. Se $2q = 1$, allora la serie diventa $\sum \frac{\arctan n}{n^{3/2} \log 2}$, che è ovviamente convergente. Se $2q > 1$, allora $\log(1 + (2q)^n) \geq \log 2$ e per confronto la serie converge ancora. Infine se $2q < 1$, si ha che

$$\log(1 + (2q)^n) \sim (2q)^n, \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e la serie $\sum \frac{\arctan n}{n^{3/2}(2q)^n}$ diverge siccome domina il termine esponenziale con base $2q < 1$. Per criterio di equivalenza asintotica si conclude.

A4. Con un conto esplicito si vede che

$$f(4) = \ln 3, \qquad f'(4) = -\frac{1}{3}, \qquad f''(4) = \frac{1}{9},$$

quindi

$$P(x) = \ln 3 - \frac{1}{3}(x-4) + \frac{1}{9}(x-4)^2.$$

A5. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 25 = 0$, che ha radici complesse $\lambda_{1,2} = \pm 5i$, quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$u_o(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \sin(5t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vista la forma del termine noto si cerca una soluzione particolare della forma $u_P(t) = Ae^t$, e imponendo che soddisfi l'equazione si trova $A = 1$. Infine, imponendo le condizioni iniziali si trova la soluzione del problema di Cauchy

$$u(t) = -\frac{1}{5} \sin(5t) + e^t.$$

A6. Il primo limite, utilizzando il limite notevole della costante di Napier, è uguale a 2. Il secondo limite, usando gli sviluppi, e un limite simile al precedente, si calcola che risulta 4.

A7. Si osserva che l'unico estremo in cui la funzione potrebbe essere illimitata è 1. Per $x \to 1$ si ha

$$\frac{\sin^2(\ln x)}{(1-x^2)^\alpha} \sim \frac{(x-1)^2}{(1+x)^\alpha(1-x)^\alpha},$$

dunque per confronto asintotico l'integrale converge per $\alpha - 2 < 1$.

A8. Si riscrive il numero complesso (moltiplicando numeratore e denominatore per $1-i$ e facendo il quadrato)

$$\left(\frac{2\sqrt{5}i}{1+i}\right)^2 = 10i.$$

Resta dunque da risolvere l'equazione $z^4 = 10i = 10e^{i\frac{\pi}{2}}$, e scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$ si ottengono le quattro radici

$$\rho = \sqrt[4]{10}, \qquad \theta_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Parte B

B1. $\boxed{\text{D}}$ Per criterio del rapporto (più convergenza assoluta)

B2. $\boxed{\text{C}}$ Per teorema fondamentale calcolo integrale

B3. $\boxed{\text{B}}$ Con conto esplicito.

B4. $\boxed{\text{B,C}}$ Per definizione di o piccolo e di asintoticamente equivalente (B). La (C) è corretta visto che ovviamente $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Si noti che ci sono due risposte esatte (se avete risposto una delle due, vi è stata contata come corretta)

B5. $\boxed{\text{B}}$ Sfruttando lo sviluppo di $\ln(x-1) = \ln(1+(x-2))$ per $x \to 2$ o con conto esplicito

B6. $\boxed{\text{A}}$ Per caratterizzazione/definizione della continuità nel punto x_0 della funzione $\widetilde{f}(x) = l$ se $x = x_0$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \neq x_0$.

B7. $\boxed{\text{B}}$ Perchè ogni successione monotona ammette limite (finito o infinito), e visto che la funzione arcotangente è continua e per $x \to +\infty$ tende a $\dfrac{\pi}{2}$.

B8. $\boxed{\text{B}}$ Per il teorema del valor medio di Lagrange: esiste $c \in (-5, 0)$ tale che $f(0) - f(-5) = 5f'(c) \leq 5$.