PARTE A

① $f : \mathbb{R} \setminus \{-8\} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \dfrac{|x-6|}{x+8}$.

Calcolare $\inf f$ e $\sup f$.
Trovare eventuali punti di massimo e minimo, e dire se sono punti di massimo e minimo locali o globali

Osserviamo che

$$\lim_{x \to -8^+} f(x) = \lim_{x \to -8^+} \frac{|x-6|}{x+8} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -8^-} f(x) = \lim_{x \to -8^-} \frac{|x-6|}{x+8} = -\infty$$

Pertanto $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$

Osserviamo che

$$f(6)=0$$

e che $\quad f(x) \sim \frac{1}{14}|x-6| \quad$ per $\quad x \to 6$

Pertanto f ha in $x=6$ un punto di minimo, dove la funzione <u>non</u> è derivabile.

Cerchiamo eventuali altri punti di massimo e minimo locali di f, utilizzando la derivata prima

$$f'(x) = \frac{\frac{|x-6|}{x-6}(x+8) - |x-6|}{(x+8)^2} = \frac{|x-6|}{(x+8)^2}\left(\frac{x+8}{x-6} - 1\right)$$

$$= \frac{|x-6|}{(x+8)^2} \; \frac{x+8-x+6}{x-6} = 14 \, \frac{|x-6|}{x-6} \, \frac{1}{(x+8)^2}$$

Pertanto

$$x > 6 \qquad f'(x) = 14 \frac{1}{(x+8)^2} > 0$$

$$x < 6 \qquad f'(x) = -14 \frac{1}{(x+8)^2} < 0$$

A parte $x = 6$, dunque, non vi sono altri punti di massimo o minimo locale.

Osserviamo, poi, che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

Inoltre, dai risultati precedenti

$$x > 6 \qquad f''(x) = -28 \frac{1}{(x+8)^3} < 0$$

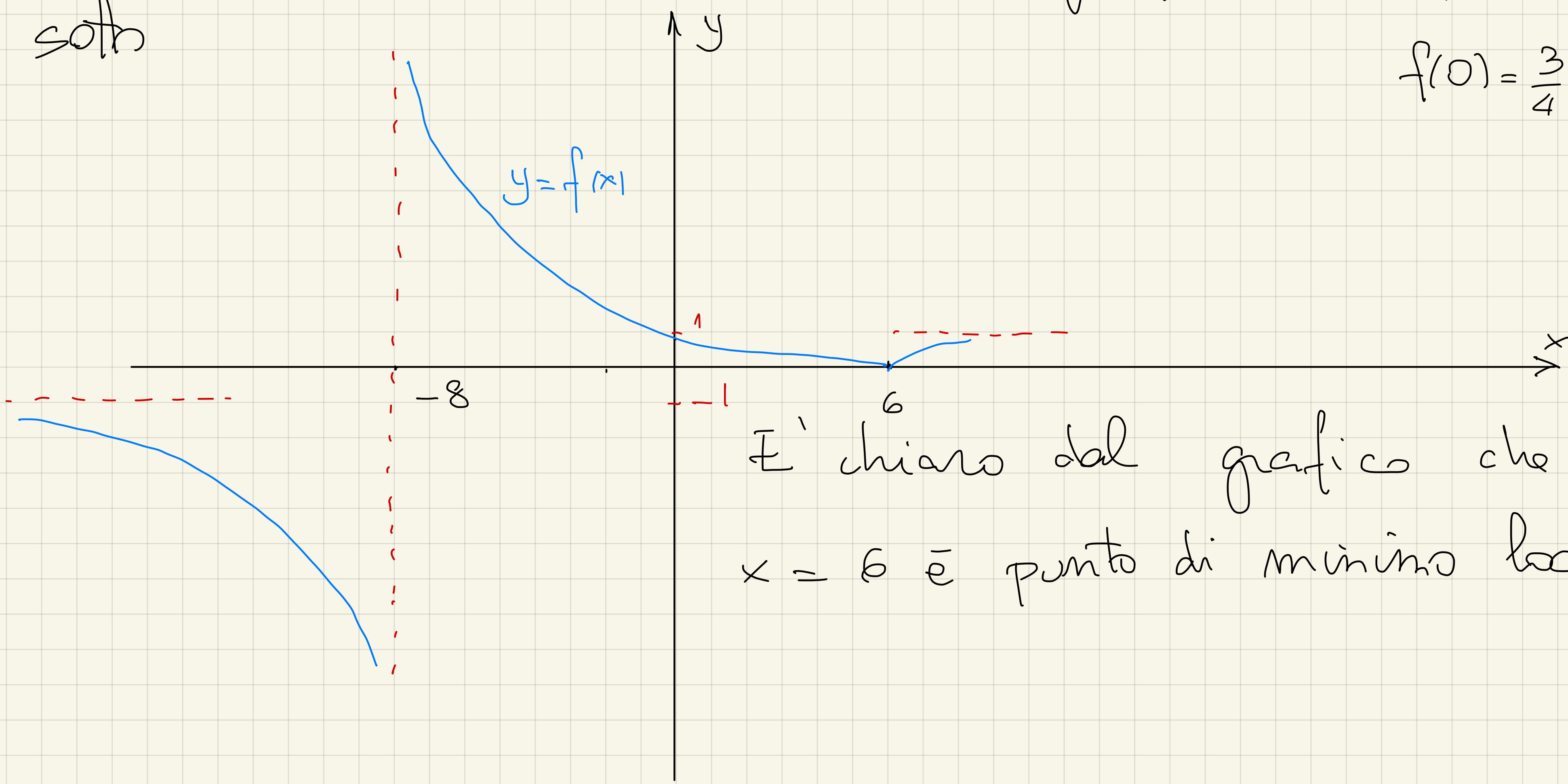
$$x < 6 \qquad f''(x) = 28 \frac{1}{(x+8)^3}$$

ed osserviamo che

$$f''(x) > 0 \qquad \forall\ x \in (-8, 6)$$

$$f''(x) < 0 \qquad \forall\ x \in (-\infty, -8)$$

Pertanto, f è convessa in $(-8, 6)$ e concava in $(-\infty, -8)$ e in $(6, +\infty)$. Il grafico è riportato sotto



È chiaro dal grafico che $x = 6$ è punto di minimo locale

(2) $f(x) = \ln^2(2x) + 2\ln(2x) + 3$

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = \ln^2\left(\cancel{2}\frac{e}{\cancel{2}}\right) + 2\ln\left(\cancel{2}\frac{e}{\cancel{2}}\right) + 3 = \ln^2 e + 2\ln e + 3$$

$$= 1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{[Ricordiamo che } \ln e = 1 \text{]}$$

$$f'(x) = 2\ln(2x) \cdot \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} \qquad \left[D \ln ax = \frac{1}{x} \right]$$

$$= \frac{2}{x}\ln(2x) + \frac{2}{x}$$

$$f'\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{2}{e/2}\ln\left(\cancel{2}\frac{e}{\cancel{2}}\right) + \frac{2}{e/2} = \frac{4}{e} + \frac{4}{e} = \frac{8}{e}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2}\ln(2x) + \cancel{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{2}{x^2}} = -\frac{2}{x^2}\ln(2x)$$

$$f''\left(\frac{e}{2}\right) = -\frac{2}{(e/2)^2}\ln\left(\cancel{2}\frac{e}{\cancel{2}}\right) = -\frac{8}{e^2}$$

Pertanto

$$P_2\left(x; \frac{e}{2}\right) = f\left(\frac{e}{2}\right) + f'\left(\frac{e}{2}\right)\left(x - \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{e}{2}\right)\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 =$$

$$= 6 + \frac{8}{e}\left(x - \frac{e}{2}\right) - \frac{4}{e^2}\left(x - \frac{e}{2}\right)^2$$

---

(3) $$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sinh(x-1) - \sin((x-1)^2)}{\cos(x+1)\arctan(x-1) + \sqrt{1 - \cos(x-1)}}$$

Poniamo

$$N(x) = \sinh(x-1) - \sin((x-1)^2)$$

$$D(x) = \cos(x+1)\arctan(x-1) + \sqrt{1 - \cos(x-1)}$$

Abbiamo

$$N(x) = x - 1 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^4) - \left[(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^6 + \right.$$

$$\left. + o((x-1)^6) \right] = x - 1 + o(x-1) \qquad \text{per } x \to 1^+$$

$$D(x) = \cos(x+1) \arctan(x-1) + \sqrt{1 - \cos(x-1)}$$

$$= \cos 2 \left[(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^4) \right] +$$

$$+ \sqrt{\cancel{1} - [\cancel{1} - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^3)} =$$

$$= (x-1)\left[\cos 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + o(x-1) \qquad \text{per } x \to 1^+$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 + o(x-1)}{(x-1)\left[\cos 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + o(x-1)} = \frac{1}{\cos 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(4) $u'' - 7u' = 0$

$$\lambda^2 - 7\lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda - 7) = 0 \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 7$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$u = c_1 + c_2 e^{7t}$$

Venendo al Problema di Cauchy, occorre trovare l'integrale particolare dell'equazione completa.
Poiché

$$f(t) = 3e^{-t} \implies u_p(t) = A e^{-t}$$

con A da determinare. Avremo

$$u_p' = -Ae^{-t}, \qquad u_p'' = Ae^{-t}.$$

Pertanto

$$A e^{-t} + 7A e^{-t} = 3e^{-t}$$

$$8A e^{-t} = 3e^{-t} \Longrightarrow A = \frac{3}{8}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$u = C_1 + C_2 e^{7t} + \frac{3}{8} e^{-t}$$

da cui

$$u' = 7C_2 e^{7t} - \frac{3}{8} e^{-t}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{matrix} u(0) = \frac{3}{8} \Longrightarrow \\ u'(0) = 0 \Longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 + \cancel{\frac{3}{8}} = \cancel{\frac{3}{8}} \\ 7C_2 - \frac{3}{8} = 0 \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{3}{56}$$

$$C_1 = -\frac{3}{56}$$

Quindi la soluzione del Problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{3}{56} + \frac{3}{56} e^{7t} + \frac{3}{8} e^{-t}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{6n}\left(\sqrt{1+n^{\alpha}} - 1\right)}{n^{7\alpha}\left(2 \sinh 6n + \sin n\right)}$$

Se poniamo

$$a_n = \frac{e^{6n}\left(\sqrt{1+n^{\alpha}} - 1\right)}{n^{7\alpha}\left(2 \sinh 6n + \sin n\right)}$$

abbiamo

$$a_n = \frac{e^{6n} \quad n^{\alpha}}{n^{7\alpha}\left[\left(e^{6n} - e^{-6n}\right) + \sin n\right]\left[\sqrt{1+n^{\alpha}} + 1\right]}$$

$$\sim \frac{1}{n^{6\alpha}\left[\sqrt{1+n^{\alpha}}+1\right]}$$

Se $\alpha = 0$ osserviamo che $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

e la serie <u>non</u> può convergere perché

$\lim_{n\to\infty} a_n$ <u>non</u> è zero.

Se $\alpha < 0$, $a_n \sim \frac{n^{6|\alpha|}}{2}$ ed ancora non

è soddisfatta la CN di convergenza.

Se $\alpha > 0$, risulta

$$a_n \sim \frac{1}{n^{6\alpha}\cdot n^{\alpha/2}} = \frac{1}{n^{\frac{13}{2}\alpha}}$$

e la serie converge se

$$\frac{13}{2}\alpha > 1 \implies \alpha > \frac{2}{13}.$$

⑥ $f : (0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{\ln(3x)}$

Abbiamo

$$f\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}e\right)}{\ln\left(\cancel{3}\frac{e}{\cancel{3}}\right)} = \ln\left(\frac{2}{3}e\right)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln 3x - \frac{1}{x}\ln 2x}{\ln^2(3x)} = \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{3}{2}}{\ln^2(3x)}$$

Pertanto

$$f'\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{\frac{1}{e/3}\ln\frac{3}{2}}{\ln^2\left(\cancel{3}\frac{e}{\cancel{3}}\right)} = \frac{3}{e}\ln\frac{3}{2}$$

Quindi, l'equazione della retta tangente al grafico della f in $x_0 = e/3$ è

$$y - \ln\left(\frac{2}{3}e\right) = \frac{3}{e}\ln\frac{3}{2}\left(x - \frac{e}{3}\right).$$

⑦ $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{1+6x}\right) + \dfrac{x}{x+2+\sqrt{x+2}}$

Poniamo

$$f_1(x) = \ln(1+6x)^{1/3} = \frac{1}{3}\ln(1+6x)$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x+2+\sqrt{x+2}}$$

Abbiamo

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{1}{3}\int \ln(1+6x)\,dx = (pp) = \frac{1}{3}x\ln(1+6x) +$$

$$-\frac{1}{3}\int x\,\frac{6}{1+6x}\,dx = \frac{1}{3}x\ln(1+6x) - \frac{1}{3}\int\frac{6x+1}{6x+1}\,dx$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{1}{6x+1}\,dx = \frac{1}{3}x\ln(1+6x) - \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}\ln(1+6x)$$

$$+\,C$$

Inoltre

$$\int \frac{x}{x+2+\sqrt{x+2}}\,dx$$

Sostituiamo $x+2 = t^2$

$$x = t^2-2$$

$$dx = 2t\,dt$$

Pertanto, l' integrale diventa

$$\int \frac{t^2-2}{t^2+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2-2}{t+1}\,dt = 2\int \frac{t^2+t-t-2}{t+1}\,dt$$

$$= 2\int t\,dt - 2\int \frac{t+2}{t+1}\,dt = t^2 - 2\int dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= t^2-2t - \ln|1+t|$$

Pertanto

$$\int \frac{x}{x+2+\sqrt{x+2}}\,dx = x+2-2\sqrt{x+2} - \ln(1+\sqrt{x+2}) + C$$

(8) $w = 1+i$

$$A = \left| w - \frac{i}{\overline{w}} \right| = \left| 1+i - \frac{i}{1-i} \right| =$$

$$= \left| \frac{(1+i)(1-i) - i}{1-i} \right| = \left| \frac{1+1-i}{1-i} \right| =$$

$$= \left| \frac{2-i}{1-i} \right| = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \implies A^2 = \frac{5}{2}$$

Dobbiamo, ora, risolvere

$$z^2 |z| = \frac{5}{2} i$$

Scriviamo z in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\vartheta}$, da cui $|z| = \rho$, $z^2 = \rho^2 e^{2i\vartheta}$. Tenendo conto che $\frac{5}{2} i = \frac{5}{2} e^{\frac{\pi}{2} i}$, otteniamo

$$\rho^3 e^{2i\vartheta} = \frac{5}{2} e^{\frac{\pi}{2} i}$$

da cui otteniamo

$$\rho^3 = \frac{5}{2}$$

$$2\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Perciò

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Benché $k \in \mathbb{Z}$, è chiaro che abbiamo valori distinti solo per $k=0$ e $k=1$ (gli altri valori di k producono le stesse soluzioni). Quindi

$k=0$ $\qquad z = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\, e^{i\pi/4} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$k=1$ $\qquad z = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\, e^{i\frac{5}{4}\pi} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

PARTE B

① $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[1, +\infty)$, derivabile in $(1, +\infty)$, $f(1) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

Se f è costante, allora $\forall x \in (1, +\infty)$ è $f'(x) = 0$.

Se f non è costante, ammette nell'intervallo $(1, +\infty)$ almeno un punto di minimo o un punto di massimo. Poichè f è derivabile, in tale punto di estremo, necessariamente deve essere $f'(x) = 0$.

Quindi, in entrambi i casi, esiste $\xi \in (1, +\infty)$ t.c. $f'(\xi) = 0$, cioè $\boxed{D}$.

2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, di classe C^3

$$P_3(x;0) = 8+4x+7x^2+2x^3$$
$$= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3$$

Quindi

$f(0)=8$ $\qquad$ $f''(0)=14$

$f'(0)=4$ $\qquad$ $f'''(0)=12$

Concludiamo l'equazione della retta tangente in $(0,8)$ ha equazione

$$y-8=4x$$

cioè $\boxed{A}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n a_n$ converge.

Poiché $\cos(n\pi) = (-)^n$, è immediato osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n a_n \quad \text{converge}$$

cioè $\boxed{B}$

Se consideriamo $a_n = \frac{1}{n}$, abbiamo $|a_n| = a_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos 2\pi n)\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Quindi $\boxed{A}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ sono false

---

(4) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua e positiva.

Sia $L = \int_a^b f(x)\,dx$.

Se definiamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

per il Teorema fondamentale del Calcolo

$$F'(x) = f(x) > 0,$$

quindi $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona, strettamente crescente e $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(t)dt = L$

Inoltre F è continua su $[a,b]$. Per il Teorema dei valori intermedi, $\forall \ \lambda \in [0, L]$,

$\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $F(c) = \lambda$, cioè

$$\int_a^c f(t)\,dt = \lambda$$

Quindi la risposta corretta è $\boxed{D}$

(5) $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$

Dividendo ambo i membri per L, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{L} = 1$$

Poiché $L > 0$, per il Teorema della permanenza del segno, $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ con $\delta > 0$ opportuno. Possiamo, dunque, passare ai reciproci e concludere che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{L}{f(x)} = 1,$$

cioè la risposta $\boxed{D}$

---

(6) Sia $f(x) = o(\ln x)$ per $x \to 0^+$ e $g(x) \sim x^2$ per $x \to 0^+$.

$$f(x) = o(\ln x) \quad \text{per } x \to 0^+ \implies \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$$

$$g(x) \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0^+ \implies \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = 1$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)g(x)}{x^2 \ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\ln x} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = 0,$$

ossia

$$f(x)g(x) = o(x^2 \ln x) \quad \text{per } x \to 0^+$$

che è la risposta $\boxed{D}$

---

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R} \ |f(x)| \leq |x|$

In particolare, allora, per $x = 0$, abbiamo

$$|f(0)| \leq 0 \implies f(0) = 0.$$

Inoltre

$$0 \leq |f(x)| \leq |x|$$

Per il Teorema dei carabinieri, allora, poichè

$$\lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

concludiamo che

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0 = f(0)$$

cioè f è continua in $x_0 = 0$, risposta $\boxed{B}$

---

(8) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) > 0$

Poichè f è continua su un insieme chiuso e limitato

to, assume sicuramente il massimo ed il minimo.
Non abbiamo alcuna informazione sui possibili valori del massimo e del minimo. Essi, tuttavia, possono essere assunti in più punti.
La risposta corretta, pertanto, è $\boxed{B}$.