PARTE A

① $f : (7, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{x^2 - 7^2}$$

Osserviamo che possiamo riscrivere f in questo modo

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln (x^2 - 7^2)$$

$$f(7\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \ln (2 \cdot 7^2 - 7^2) = \frac{1}{3} \ln (7^2) = \frac{2}{3} \ln 7$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{2x}{x^2 - 7^2}$$

$$f'(7\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 7}{2 \cdot 7^2 - 7^2} = \frac{1}{3} \frac{2\sqrt{2}\,\cancel{7}}{7^{\cancel{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{21}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2 - 7^2 - 2x^2}{(x^2 - 7^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{-x^2 - 7^2}{(x^2 - 7^2)^2}$$

$$f''(\sqrt{2} \cdot 7) = \frac{2}{3} \frac{-2 \cdot 7^2 - 7^2}{(2 \cdot 7^2 - 7^2)^2} = \frac{2}{\cancel{3}} \frac{-\cancel{3} \cdot \cancel{7^2}}{7^2 \cancel{7^2}} = -\frac{2}{7^2}$$

Quindi

$$P_2(x; 7\sqrt{2}) = f(7\sqrt{2}) + f'(7\sqrt{2})(x - 7\sqrt{2}) + \frac{1}{2} f''(7\sqrt{2})(x - 7\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{2}{3} \ln 7 + \frac{2\sqrt{2}}{21}(x - 7\sqrt{2}) - \frac{1}{7^2}(x - 7\sqrt{2})^2$$

(2) $\begin{cases} u' + \sin t \cdot u = \sin t \\ u(0) = 5 \end{cases}$

Possiamo riscrivere l'equazione differenziale come

$$u' = -\sin t \, u + \sin t$$

da cui abbiamo

$$u = e^{-\int \sin t\, dt}\left[C + \int \sin t \; e^{\int \sin t\, dt} dt\right]$$

$$u = e^{\cos t}\left[C + \int \sin t \; e^{-\cos t} dt\right]$$

$$u = e^{\cos t}\left[C + e^{-\cos t}\right]$$

$$u = C e^{\cos t} + 1$$

Imponendo la condizione iniziale, abbiamo

$$5 = C e^{\cos 0} + 1$$

$$5 = Ce + 1 \qquad C = \frac{4}{e}$$

Quindi la soluzione cercata è

$$u = \frac{4}{e} e^{\cos t} + 1 = 4 e^{\cos t - 1} + 1.$$

---

(3) $f : [7, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \arctan\sqrt{x^2 - 7^2}$

Abbiamo $\quad f(7\sqrt{5}) = \arctan\sqrt{5 \cdot 7^2 - 7^2} =$

$$= \arctan\sqrt{4\cdot 7^2} = \arctan\sqrt{2^2\cdot 7^2} = \arctan 14$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-7^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-7^2}}$$

$$f'(7\sqrt{5}) = \frac{1}{1+(5\cdot 7^2-7^2)} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 7^2-7^2}}$$

$$= \frac{1}{1+4\cdot 7^2} \quad \frac{\cancel{7}\sqrt{5}}{2\cdot \cancel{7}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{1+14^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \, \frac{1}{197}$$

Quindi l' equazione della retta tangente è

$$r: \qquad y - \arctan 14 = \frac{\sqrt{5}}{2\cdot 197}(x - 7\sqrt{5})$$

---

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{\ln(1+7^n)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{\ln 7^n}\right.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n\ln 7}\right)^n$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{\ln 7}\cdot\frac{1}{n}\right)^{n\frac{\ln 7}{7}}\right]^{\frac{7}{\ln 7}}$$

$$= e^{\frac{7}{\ln 7}}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 7} \frac{1}{x}\left(\frac{\sinh^2(x-7)}{1-\cos(x-7)+\sin^3(x-7)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 7} \frac{\sinh^2(x-7)}{1-\cos(x-7)+\sin^3(x-7)}$$

$$= \frac{1}{7} \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)^2}{1-1+\frac{1}{2}(x-7)^2+(x-7)^3} =$$

$$= \frac{1}{7} \lim_{x\to 7} \frac{\cancel{(x-7)^2}\, 1}{\frac{1}{2}\cancel{(x-7)^2}} = \frac{2}{7}$$

---

⑤ Determinare la primitiva $G(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{7^x}{7^{2x}+2\cdot 7^x+1} \qquad \text{t.c.} \quad G(0)=0.$$

Abbiamo

$$G(x) = \int_0^x \frac{7^t}{7^{2t}+2\cdot 7^t+1}\, dt$$

Può essere più semplice calcolare l'integrale indefinito corrispondente e poi sostituire gli estremi

Osserviamo che

$$\int \frac{7^t}{7^{2t}+2\cdot 7^t+1}\, dt \longrightarrow \begin{pmatrix} 7^t = s \\ 7^t \ln 7\, dt = ds \\ 7^t dt = \frac{1}{\ln 7} ds \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\ln 7}\int \frac{ds}{s^2+2s+1} = \frac{1}{\ln 7}\int \frac{1}{(s+1)^2}\,ds$$

$$= -\frac{1}{\ln 7}\,\frac{1}{s+1}$$

essendoci limitati a scrivere <u>una</u> primitiva.

Quindi, sempre considerando <u>una</u> primitiva, possiamo concludere che

$$\int \frac{7^t}{7^{2t}+2\cdot 7^t+1}\,dt = -\frac{1}{\ln 7}\,\frac{1}{7^t+1},$$

ed anche

$$G(x) = -\frac{1}{\ln 7}\left[\frac{1}{7^t+1}\right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{\ln 7}\left(\frac{1}{7^x+1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln 7\,(7^x+1)} + \frac{1}{2\ln 7}$$

Infine (anche se è un po' impropria come scrittura),

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = G(\infty) - \underbrace{\cancel{G(0)}}_{=0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln 7\,(7^x+1)} + \frac{1}{2\ln 7}\right)$$

$$= \frac{1}{2\ln 7}$$

⑥ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n + 4 \arctan n}{(n^4+3n-1)^{\alpha}}$$

Posto

$$a_n = \frac{(-)^n + 4 \arctan n}{(n^4+3n-1)^{\alpha}}$$

osserviamo che per $n \to \infty$

$$0 < \frac{2\pi - 1}{n^{4\alpha}} \leq a_n \leq \frac{2\pi + 1}{n^{4\alpha}}$$

Per i noti criteri di convergenza, la serie converge purché

$$4\alpha > 1 \implies \alpha > 1/4$$

---

⑦ $f : [1, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = 2x^6 - 2x^4 + 4x^2 + 7$

Abbiamo

$$f'(x) = 12x^5 - 8x^3 + 8x$$
$$= 4x^3(3x^2 - 2) + 8x$$

E' immediato osservare che in $[1, 8]$ la derivata prima è strettamente positiva. Quindi f è strettamente crescente.
Pertanto,

$$x_m = 1, \qquad x_M = 8$$

Inoltre

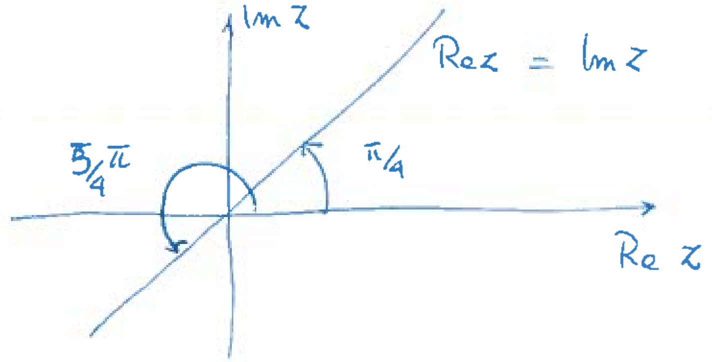
$$m = f(x_m) = f(1) = 2 - 2 + 4 + 7 = 11.$$

⑧ $(|z|-7)(\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z) = 0$

Abbiamo per la legge di annullamento del prodotto

$$|z| - 7 = 0 \qquad |z| = 7 \qquad z = 7e^{i\vartheta} \quad \text{con } \vartheta \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Re} z - \mathrm{Im} z = 0 \qquad \mathrm{Re} z = \mathrm{Im} z$$



da cui otteniamo

$$z = \rho e^{i(\pi/4 + 2k\pi)} \qquad \rho \geq 0 \text{ arbitrario, } k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \rho e^{i(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi)} \qquad \rho \geq 0 \text{ arbitrario, } n \in \mathbb{Z}$$

Per quanto riguarda il sistema, abbiamo

$$\begin{cases} |z| = 7 \\ z = \rho e^{i\pi/4} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} |z| = 7 \\ z = \rho e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{cases}$$

(avendo omesso la periodicità). Concludiamo

$$z = 7e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

$$z = 7e^{i(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi)}$$

dove abbiamo recuperato la periodicità.

PARTE B

① $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln|x|} & x \neq 0 \end{cases}$

Abbiamo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln|x|} = 0 = f(0).$$

Quindi f è continua in $x = 0$ e la risposta corretta è $\boxed{B}$

---

② $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

Poniamo

$$F(x) = \int_x^{x_0} f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$F(x) = -\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Pertanto

$$F(x)\,G(x) = -\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)\left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right)$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo

$$\left(F(x)\,G(x)\right)' = -f(x)\left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right) - \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \cdot g(x)$$

$$= -f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x)$$

e la risposta corretta è $\boxed{D}$.

---

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2

$P_2(x, 7) = 7 - x$

Sappiamo che

$$P_2 = f(7) + f'(7)(x-7) + \frac{1}{2} f''(7)(x-7)^2$$

e

$$P_2(7) = f(7)$$
$$P_2'(7) = f'(7)$$
$$P_2''(7) = f''(7)$$

Osserviamo che

$$P_2(x, 7) = 7 - x \implies P_2(7) = 0$$
$$P_2'(x, 7) = -1 \implies P_2'(7) = -1 < 0$$
$$P_2''(x, 7) = 0 \implies P_2''(7) = 0$$

Poiché $P_2'(7) = -1$, per quanto scritto sopra avremo $f'(7) = -1 < 0$; quindi f è decrescente in un intorno di $x_0 = 7$ e la risposta corretta è $\boxed{A}$

---

(4) $f(x) = \sin x^2$

$g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$

Abbiamo

$$f(x) \sim x^2 = x^2 + o(x^2)$$

Quindi, per le proprietà di o piccolo

$$f(x)g(x) = \left(x^2 + o(x^2)\right) o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

e la risposta corretta è $\boxed{D}$

---

(5) a_n t.c. $\lim_{n \to \infty} a_n = L > 0.$

Per la continuità della funzione coseno, abbiamo

$$\lim_{n \to \infty} \cos(a_n) = \cos\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right)$$

$$= \cos L$$

La risposta corretta è $\boxed{B}$

---

(6) $f : [1,4] \to \mathbb{R}$, f di classe C^1 t.c.

$$f'(2) = 4 \quad \text{e} \quad f'(3) = 1$$

Posto

$$g(x) = f'(x)$$

osserviamo che g è di classe C^0 in $[1,4]$

e che

$$g(2) = 4, \quad g(3) = 1$$

Per il Teorema dei valori intermedi, nell'intervallo $[2,3]$ g deve assumere tutti i valori tra 1 e 4.

In particolare, deve esistere $\xi \in [2,3]$ t.c.

$$g(\xi) = 2$$

(2 è un valore compreso tra 1 e 4). Quindi,

$$\exists\, \xi \in [2,3] \subset (1,4) \quad \text{t.c.} \quad f'(\xi) = 2$$

La risposta corretta è $\boxed{B}$

---

⑦ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

Poiché

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \subset \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

per un noto risultato sulle successioni estratte, possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

e la risposta corretta è $\boxed{B}$

---

⑧ $a_n > 0 \quad \forall n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^7$ è convergente

Per la condizione necessaria di convergenza, deve essere

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Quindi

$$0 < a_n^8 < a_n^7$$

e per il criterio del confronto possiamo concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^8 \quad \text{è convergente}$$

La risposta corretta è $\boxed{A}$