A1) $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8 \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$

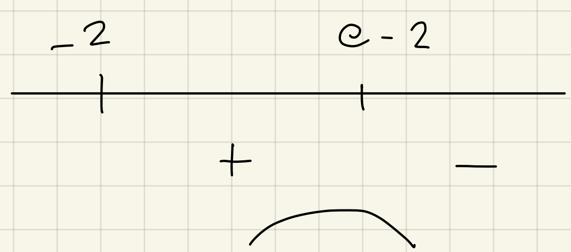
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad f(0) = 8\frac{\ln 2}{2} = 4\ln 2$$

$f(x) \geq 0 \qquad \ln(x+2) \geq 0 \qquad x+2 \geq 1 \qquad x \geq -1$

$$f'(x) = 8\,\frac{1 - \ln(x+2)}{(x+2)^2} \qquad f'(x) \geq 0 \qquad 1 - \ln(x+2) \geq 0$$

$\ln(x+2) \leq 1 \qquad x+2 \leq e \qquad x \leq e-2$



Quindi $x_M = e - 2$ (punto di max)

$$M = f(x_M) = 8\frac{\ln e}{e} = \frac{8}{e}$$

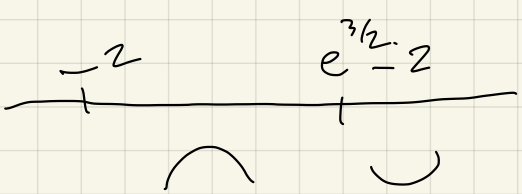
Per completezza, calcoliamo anche f'' e tracciamo il grafico di f.

$$f'' = 8\,\frac{-\frac{1}{\cancel{x+2}}\cancel{(x+2)}^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x+2)}\left(1-\ln(x+2)\right)}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= 8\,\frac{-1-2+2\ln(x+2)}{(x+2)^3} = 8\,\frac{2\ln(x+2)-3}{(x+2)^3}$$

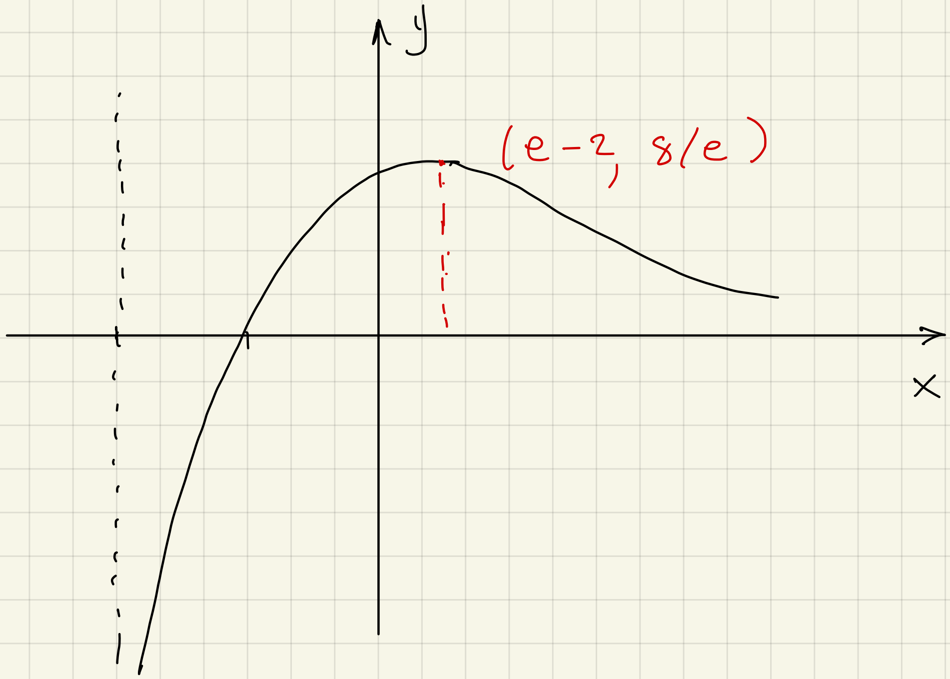
$f'' \geq 0 \qquad 2\ln(x+2)-3 \geq 0 \qquad \ln(x+2) \geq \frac{3}{2}$

$x+2 \geq e^{3/2} \qquad x \geq e^{3/2}-2$



Quindi $x = e^{3/2}-2$ è un punto di flesso ascendente

$$f(e^{3/2}-2) = 8\,\frac{\ln e^{3/2}}{e^{3/2}} = \frac{12}{e^{3/2}}$$



A2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^n \frac{\ln(1+n)}{n\, 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} \left(\frac{9}{2}\right)^n$$

Se poniamo $a_n = \dfrac{\ln(1+n)}{n} \left(\dfrac{9}{2}\right)^n$, possiamo osservare che

$$\frac{\ln(1+n)}{n} \left(\frac{9}{2}\right)^n < \frac{n}{n} \left(\frac{9}{2}\right)^n = \left(\frac{9}{2}\right)^n .$$

Quindi, per il criterio del confronto, per $0 \leq q < 2$, la serie assegnata converge, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^n$ è serie geometrica.

D'altro canto, se $q = 2$, abbiamo $a_n = \frac{\ln(1+n)}{n}$ e poiché

$$\frac{\ln(1+n)}{n} > \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \geq 2$$

ancora, per il criterio del confronto, la serie diverge per $q = 2$. La serie diverge anche per $q > 2$, poiché in tal caso $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1+n)}{n} \left(\frac{q}{2}\right)^n = +\infty$.

A3) $(e^{|z|} + 7)(z^2 - |z|^2 + 1 + 2i) = 0$

Osserviamo che $\forall z \in \mathbb{C}$ $\underbrace{e^{|z|} + 7}_{\in \mathbb{R}} > 0$. Pertanto, ci ridu_ ciamo a

$$z^2 - |z|^2 + 1 + 2i = 0$$

Se poniamo $z = x + iy$, otteniamo

$$(x+iy)^2 - (x^2+y^2) + 1 + 2i = 0$$

$$\cancel{x^2} - y^2 + 2ixy - \cancel{x^2} - y^2 + 1 + 2i = 0$$

Eguagliando parte reale e parte immaginaria, otteniamo

$$\begin{cases} -2y^2 + 1 = 0 \\ 2xy + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{y} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono

$$y_1 = + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_1 = -\sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \qquad z_1 = -\sqrt{2} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = +\sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \qquad z_2 = \sqrt{2} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

A4| $f(x) = \dfrac{9x^2+3}{x} \ln x, \quad x > 0$

Le primitive sono date da

$$\int \frac{9x^2+3}{x} \ln x \, dx = \int 9x \ln x \, dx + \int \frac{3}{x} \ln x \, dx$$

$$= 9\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{9}{2}\int x^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{x}} \, dx + \frac{3}{2} \ln^2 x + C$$

$$= \frac{9}{2} x^2 \ln x - \frac{9}{4} x^2 + \frac{3}{2} \ln^2 x + C$$

A5| $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2+4)\, e^{2+x}$

$$f(2) = 8e^4$$

$$f'(x) = 2x\, e^{2+x} + (x^2+4)\, e^{2+x}; \quad f'(2) = 12e^4$$

$$f''(x) = 2e^{2+x} + 2x e^{2+x} + 2x e^{2+x} + (x^2+4) e^{2+x}$$

$$= e^{2+x} (x^2 + 4 + 4x + 2)$$

$$f''(2) = e^4 (4 + 4 + 8 + 2) = 18 e^4$$

Poiché

$$P_2 (x; 2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2} (x-2)^2$$

otteniamo

$$P_2 (x; 2) = 8e^4 + 12 e^4 (x-2) + 9 e^4 (x-2)^2$$

$\underline{\Delta 6}$ | $\lim_{x \to 2} 2x \left(\frac{\ln(x-1) - \sinh(x-2)}{\cos(x-2) - \cosh(x-2)} \right)$

Abbiamo

$$\left(\lim_{x \to 2} 2x \right) \cdot \left(\lim_{x \to 2} \frac{\ln[1 + (x-2)] - \sinh(x-2)}{\cos(x-2) - \cosh(x-2)} \right) =$$

$$= 4 \cdot \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} - \frac{(x-2)^2}{2} - \cancel{(x-2)} - \frac{1}{6}(x-2)^3}{\cancel{1} - \frac{(x-2)^2}{2} \cancel{-1} - \frac{(x-2)^2}{2}} =$$

$$= 4 \lim_{x \to 2} \frac{+\cancel{\frac{(x-2)^2}{2}}}{+\cancel{(x-2)^2}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$\boxed{\Delta 7}$

$$u' + 2tu = 0 \qquad u' = -2tu$$

$$u = C e^{-\int 2t\,dt} \qquad u = C e^{-t^2}$$

Passiamo al Pb di Cauchy per l'equazione lineare completa:

$$\begin{cases} u' = -2tu + 2t^3 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Abbiamo $\quad u = e^{-t^2}\left[C + \int 2t^3 e^{\int 2t\,dt}\,dt\right]$

$$v = e^{-t^2}\left[C + \int 2t^3 e^{t^2}\,dt\right]$$

$$= e^{-t^2}\left[C + \int t^2 \cdot 2t e^{t^2}\,dt\right] \overset{pp}{=} e^{-t^2}\left[C + t^2 e^{t^2} - \int 2t e^{t^2}\,dt\right]$$

$$= e^{-t^2}\left[C + t^2 e^{t^2} - e^{t^2}\right]$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione è

$$v = C e^{-t^2} + t^2 - 1$$

Se, ora, richiediamo che $v(0) = -1$, abbiamo

$$\cancel{-1} = C \cancel{-1} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Quindi la soluzione del Pb di Cauchy è

$$v = t^2 - 1$$

A8)

$$f(x) = 2(x+2) + \sin(2x) + \tanh(2x)$$

Osserviamo che

$$f(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(4) = 0$$

Inoltre

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)}$$

Poiché

$$f'(x) = 2 + 2\cos(2x) + 2\left(1 - \tanh^2(2x)\right)$$

$$f'(0) = 2 + 2 + 2 = 6$$

concludiamo che

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{6}.$$

B)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Vogliamo che anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = l$.

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)\left[1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}\right]}{g(x)}$$

E' chiaro che se $\lim_{x \to x_0} 1 + \frac{f_1(x)}{f(x)} = 1$,

ossia se $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f(x)} = 0$, abbiamo proprio quanto cercato. Poiché

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f(x)} = 0 \iff f_1(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

concludiamo che la risposta corretta è $\boxed{D}$

$\underline{B2)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Per la condizione necessaria di convergenza, avremo che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pertanto, per la continuità della funzione seno,

$$\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \sin\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \sin 0 = 0$$

e la risposta corretta è $\boxed{C}$

$\underline{A)}$ non è corretta; basta pensare alla serie

$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1}{n+1}$ dove $a_n = (-)^n \frac{1}{n+1}$

$\boxed{B}$ non è corretta. Infatti, se abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1}{n+1},$$ è chiaro che $a_n = (-)^n \frac{1}{n+1}$

e $$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty,$$ in quanto si

tratta della serie armonica.

$\boxed{D}$ non è corretta. Infatti, se abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$ è chiaro che $a_n = (-)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

e la serie converge per il Criterio di Leibnitz.

D'altro canto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

B3) $\sqrt{P(z)} = 0$ se e solo se $P(z) = 0$. Quindi

$$P(z) = 0 \iff (z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0.$$

Da qui ricaviamo

$$z^4 - 1 = 0 \implies z = \sqrt[4]{1}, \quad \text{quattro soluzioni}$$

$$z^4 + 1 = 0 \implies z = \sqrt[4]{-1}, \quad \text{quattro soluzioni}$$

Quindi complessivamente abbiamo 8 soluzioni e la risposta corretta è $\boxed{C}$.

B4) $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t^{3/2}}\, dt$

Per il Teorema fondamentale del calcolo

$$F' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}$$

ed abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^{3/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1/2}} = +\infty$$

Quindi F non è derivabile a dx in $x=0$ e $\boxed{A}$ non è corretta.

Poiché, come abbiamo visto, $F'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}$,

osserviamo che $\forall x > 0$ $F'(x) > 0$, quindi F è monotona strettamente crescente, e non può avere punti stazionari in $(0, +\infty)$. Dunque, $\boxed{C}$ non è corretta.

Infine

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\, dx$$

Se poniamo $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}$, osserviamo che

per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \dfrac{\pi/2}{x^{3/2}}$ e quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\, dx$

converge, ossia $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ esiste finito.

Pertanto, concludiamo che F è strettamente crescente e limitata nel suo dominio, ossia $\boxed{D}$ è corretta.

$\boxed{B5}$ $f(x) = \left(\cos \dfrac{x}{2}\right) \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)$

Ricorrendo agli sviluppi noti, abbiamo

$$f(x) = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^3)\right]\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)\right]\left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right]$$

$$= \frac{x}{2} + o(x)$$

Quindi, concludiamo che

$$P_1(x) = \frac{x}{2}$$

e

$$P_1(4) = \frac{4}{2} = 2,$$ ossia la risposta $\boxed{D}$

<u>B6)</u> Se consideriamo la funzione $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x) - 2g(x)$, osserviamo che, per le ipotesi date, h è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Inoltre

$$h(a) = f(a) - 2g(a) = 0$$
$$h(b) = f(b) - 2g(b) = 0.$$

Pertanto, ~~sono~~ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Rolle e possiamo concludere che

$\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $h'(c) = 0$

ossia

$\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) - 2g'(c) = 0$

$$\Downarrow$$

$$f'(c) = 2g'(c)$$

e la risposta corretta è chiaramente $\boxed{C}$

B7) Poiché $\{ma_n\}$ è limitata, esiste $M \in \mathbb{R}_+$

tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |n \, a_n| \leq M$$

ossia

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq |a_n| \leq \frac{M}{n}$$

Per il Teorema del confronto, poiché $\lim_{n \to \infty} \frac{M}{n} = 0$, concludiamo che anche

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

e la risposta corretta è $\boxed{D}$.

B8] Se I_1 e I_2 sono entrambi chiusi e limitati, anche $I_1 \cup I_2$ è chiuso e limitato. In tal caso,

f soddisfa le ipotesi del Teorema di Weierstrass ed ha, quindi, massimo e minimo. Pertanto, la risposta corretta è $\boxed{C}$.

$\boxed{D}$ non è corretta. Consideriamo, infatti,

$I_1 = [0, 1]$ e $I_2 = (-1, +\infty)$. In tal caso f sarà definita su $I_1 \cup I_2 = (-1, +\infty)$.

Se $f(x) = \ln(1 + x)$, essa non ha né max, né min.

$\boxed{A}$ non è corretta. Consideriamo, infatti,

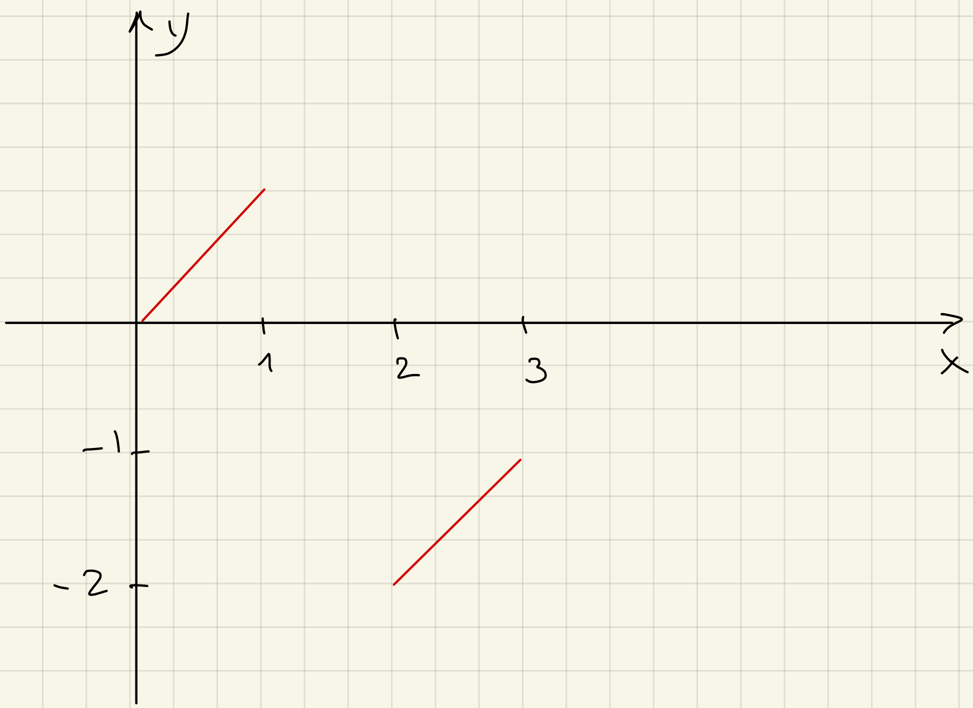
$I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, +\infty)$. In tal caso f sarà definita su $I_1 \cup I_2 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Se $f(x) = \frac{1}{x}$, essa non ha né max, né min.

B) non è corretta. Consideriamo, infatti

$$I_1 = [0,1], \qquad I_2 = [2,3],$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,1] \\ -4+x, & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

Il grafico è in figura



È chiaro che f è iniettiva; tuttavia essa non è strettamente monotona in $[0,1] \cup [2,3]$