Parte A

① Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right)^{\alpha}}{\sqrt{n}}.$$

Se poniamo

$$a_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha}}{\sqrt{n}},$$

poiché

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$$

e

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^4}$$

abbiamo

$$a_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{4\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{4\alpha + 1/2}}$$

Pertanto, la serie converge se

$$4\alpha + \frac{1}{2} > 1 \qquad 4\alpha > \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\alpha > \frac{1}{8}.}$$

---

② Data $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = 1 - e^{4\sin x}$ individuare tutti i suoi punti di massimo e minimo relativi e calcolare massimo e minimo assoluti di f.

Osserviamo che f è 2π-periodica.

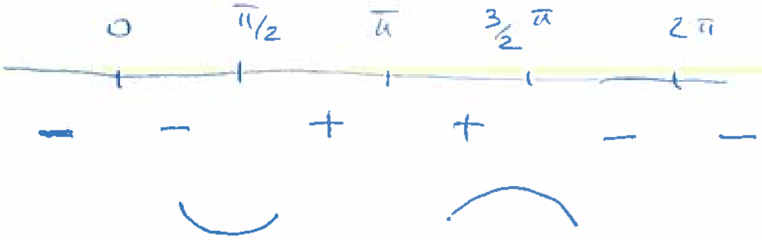
Inoltre $f(0) = f(2\pi) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

Passando alla derivata prima, abbiamo

$$f'(x) = -e^{4\sin x}(4\cos x) = -4\cos x \, e^{4\sin x};$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad -\cos x \geq 0 \quad , \qquad \cos x \leq 0 .$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$



Quindi

$x = 0$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ sono punti di <u>max</u> locale,

$x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 2\pi$ sono punti di <u>min</u> locale.

Infine

$$f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 1 - e^{4(-1)} = 1 - \frac{1}{e^4} > 0$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - e^{4(1)} = 1 - e^4 < 0$$

Pertanto

$$M_{ass} = 1 - \frac{1}{e^4}$$

$$min_{ass} = 1 - e^4$$

---

(3) Calcolare $\int 2^{2x} \arctan(2^x)\, dx$.

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$\int 2^{2x} \arctan(2^x)\,dx = \int 2^x \arctan(2^x)\, 2^x\,dx$$

Osserviamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2^x$ è monotona, strettamente crescente. Pertanto, possiamo effettuare la sostituzione

$$2^x = t$$

$$2^x \ln 2\, dx = dt$$

$$2^x\, dx = \frac{1}{\ln 2}\, dt$$

Pertanto

$$\int 2^x \arctan(2^x)\, 2^x\, dx \longrightarrow \frac{1}{\ln 2}\int t \arctan(t)\, dt$$

Calcoliamo la primitiva per parti

$$\frac{1}{\ln 2}\int t \arctan t\, dt = \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\ln 2}\left[t^2 \arctan t - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\ln 2}\left[t^2 \arctan t - t + \arctan t\right]$$

Tenendo conto della sostituzione effettuata, abbiamo

$$\int 2^{2x} \arctan(2^x)\,dx = \frac{1}{2\ln 2}\left[(2^{2x}+1)\arctan(2^x) - 2^x\right] + C$$

dove C è una costante reale arbitraria.

(4) Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 4u' + 4u = 4e^{4t} \\ u(0) = 2 \quad u'(0) = 8 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad [\text{radice doppia}]$$

Quindi,

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + u_p$$

Poiché 4 <u>non</u> è soluzione dell'equazione caratteristica, deve essere

$$u_p = A e^{4t}$$

Poiché

$$u_p' = 4A e^{4t}, \qquad u_p'' = 16 A e^{4t},$$

sostituendo, abbiamo

$$\cancel{16 A e^{4t}} - \cancel{16 A e^{4t}} + 4A \cancel{e^{4t}} = 4 \cancel{e^{4t}}$$

$$\implies A = 1$$

Quindi, l'integrale generale è

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + e^{4t},$$

da cui

$$u' = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} + 2C_2 e^{2t} + 4e^{4t}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 2 \\ 2C_1 + C_2 + 4 = 8 \end{cases} \implies \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{matrix}$$

Pertanto, la soluzione cercata è

$$u = (1+2t)e^{2t} + e^{4t}.$$

---

(5) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{\ln(n^2)}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{2\ln n}\right)^{\ln n}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{3}}\right]^3 = e^3;$$

$$\lim_{x\to 6} x\left[\frac{\sin(x-6)-\sinh(x-6)}{\arctan[(x^2-12x+36)(x-6)]}\right] =$$

$$= \left(\lim_{x\to 6} x\right)\left(\lim_{x\to 6}\frac{\cancel{(x-6)}-\frac{1}{6}(x-6)^3-\cancel{(x-6)}-\frac{1}{6}(x-6)^3}{\arctan(x-6)^3}\right)$$

$$= 6\lim_{x\to 6}\frac{-\frac{1}{3}(x-6)^3}{(x-6)^3} = -\frac{6}{3} = -2.$$

---

(7) Sia $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\arctan(2x) + \ln(1+e^{4x})$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_0=0$.

Abbiamo

$$f(x) = x^2\arctan(2x) + \ln(1+e^{4x})$$

$$f(0) = 0 + \ln 2 = \ln 2$$

$$f'(x) = 2x\arctan(2x) + \frac{2x^2}{1+4x^2} + \frac{4e^{4x}}{1+e^{4x}}$$

$$f'(0) = 0 + 0 + \frac{4}{2} = 2$$

$$f''(x) = 2\arctan(2x) + 2x \cdot \frac{2}{1+4x^2} +$$

$$+ \frac{4x(1+4x^2) - 8x \cdot 2x^2}{(1+4x^2)^2} + 4\,\frac{4e^{4x}(1+e^{4x}) - 4e^{4x} \cdot e^{4x}}{(1+e^{4x})^2}$$

$$f''(0) = 0 + 0 + 0 + \frac{4 \cdot 4}{4} = 4$$

Quindi

$$P_2(x;0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$= \ln 2 + 2x + 2x^2 .$$

---

(6) Sia $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \arctan(\sqrt{3} - 1 + e^{3x})$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$

Abbiamo

$$f(0) = \arctan(\sqrt{3} \cancel{-1} \cancel{+1}) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{3} - 1 + e^{3x})^2} \cdot 3e^{3x}$$

$$f'(0) = \frac{1}{1 + (\sqrt{3})^2} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

Quindi la retta tangente ha equazione

$$r_{tg} : \quad y - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}x$$

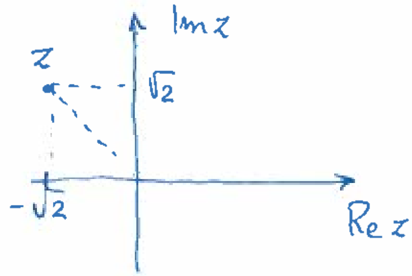
---

(8) Calcolare le radici quarte di

$$z = i(\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)$$

Abbiamo

$$z = \sqrt{2}\,(-1+i) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$



$$|z| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg z = \frac{3}{4}\pi$$

Pertanto, posto $w = \sqrt[4]{z}$, abbiamo

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)}{4} + i\sin\frac{\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)}{4}\right]$$

con $k = 0,1,2,3$. Quindi, con $k = 0,1,2,3$

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z - 7z^2 = 7|z|^2$

E' immediato verificare che $\boxed{z = 0 \text{ è soluzione}}$.

Pertanto, cerchiamo le soluzioni diverse da $z = 0$.

Posto $z = x + iy$, abbiamo

$$2(x+iy) - 7(x^2 - y^2 + 2ixy) = 7(x^2+y^2)$$

$$2x + 2iy - 7x^2 \cancel{+7y^2} - 14ixy = 7x^2 \cancel{+7y^2}$$

da cui otteniamo, separando parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} 2x - 7x^2 = 7x^2 \\ 2y - 14xy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 14x^2 = 0 \\ 2y(1-7x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x(1-7x) = 0 \\ 2y(1-7x) = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$x = \frac{1}{7}$$

$$y \in \mathbb{R} \text{ arbitrario} \implies \boxed{z = \frac{1}{7} + iy, \quad y \in \mathbb{R}}$$

PARTE B

① Si considerino $f(x) = 1 - \cos x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$.

Osserviamo che

$$f(x) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto

$$f(x)\,g(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot o(x) = o(x^3)$$

per le proprietà di o. Quindi, la risposta corretta è $\boxed{A}$

---

② Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ finito, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ finito.

Definiamo

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Avremo

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) - \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

$$= \ell_1 - \ell_2$$

Se $\ell_1 > \ell_2$, avremo $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell_1 - \ell_2 > 0$

Pertanto, per il Teorema della permanenza del segno, avremo che $h(x) > 0$ in un intorno di x_0, escluso al più x_0, cioè

$$f(x) - g(x) > 0 \quad \text{in} \quad I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

$$f(x) > g(x) \quad \text{in} \quad I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Quindi la risposta corretta è $\boxed{A}$.

---

(3) Sia $f : [3,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(3,5)$ e continua in $x = 3$, $x = 5$.

Osserviamo che per il legame fra derivabilità e continuità, f è continua anche in $(3,5)$ e quindi possiamo concludere che f è continua in $[3,5]$ e derivabile in $(3,5)$. Pertanto, possiamo applicare il Teorema di Lagrange e concludere che $\exists\, \xi \in (3,5)$ t.c.

$$\frac{f(5) - f(3)}{5-3} = f'(\xi)$$

$$\frac{f(5) - f(3)}{2} = f'(\xi) \qquad f(5) - f(3) = 2f'(\xi)$$

$$f(3) - f(5) = -2f'(\xi)$$

che è la risposta $\boxed{A}$.

---

(4) Sia data la successione $\{a_n\}$ con $n \geq 1$ definita da

$$a_{n+1} = \ln(1+a_n)$$
$$a_1 = 3$$

Osserviamo che

$$a_{n+1} = \ln(1+a_n) \leq a_n$$

per $a_n \geq 0 \Longrightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n$.

Pertanto la successione è monotona decrescente e la risposta corretta è $\boxed{B}$.

---

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $P_2(x,-1) = 1 + x + x^2$ il suo polinomio di Taylor/Mc-Laurin di grado 2 centrato in $x_0 = -1$

Per le proprietà del polinomio di Taylor/Mc-Laurin,

$$\left[P_2(x,-1)\right]^{(k)}\Big|_{x=-1} = f^{(k)}(-1) \qquad k = 0,1,2$$

Pertanto

$$P_2(-1) = 1 - 1 + 1 = 1 \Longrightarrow f(-1) = 1$$

$$P_2' = 1 + 2x, \quad P_2'(-1) = 1 - 2 = -1, \quad \Longrightarrow f'(-1) = -1$$

$$P_2'' = 2 = P_2''(-1) \Longrightarrow f''(-1) = 2$$

La risposta corretta è $\boxed{D}$, come si vede immediatamente considerando i valori di f, f' e f'' in $x_0 = -1$

---

(6) Sia (a_n) una successione a valori reali, t.c.

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) a_n$ è convergente.

Osserviamo che

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto, possiamo riscrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{conv.}$$

e la risposta corretta è la $\boxed{D}$

---

⑦ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua t.c. $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f(1) = 2$. Posto $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, risulta $(F^{-1})'(0) = ?$

Poiché $f > 0$, per il Teorema Fondamentale del Calcolo è

$$F'(x) = f(x) > 0,$$

cioè F è <u>monotona</u> <u>strettamente</u> <u>crescente</u> $\Longrightarrow$ F è invertibile

Quindi, per il Teorema di derivazione della funzione inversa

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

dal momento che

$$F(1) = 0 \implies F^{-1}(0) = 1$$

La risposta corretta è $\boxed{C}$.

(8) Si consideri $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0,\\ e^{-\frac{1}{|\sin x|}} & \text{se } x\neq 0.\end{cases}$$

Allora

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|\sin x|}}=0=f(0),$$

quindi f è continua in $x=0$. La risposta corretta è $\boxed{C}$