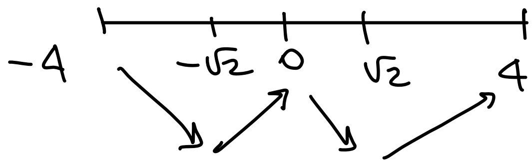
A1 $\quad f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) \geq 0 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq 0$

oppure $\quad x \geq \sqrt{2}$

Quindi l'andamento di f in $[-4,4]$ è



Siccome $f(-4) = f(4) = 4^4 - 4^3 = 192$ e $f(0) = 0$,

risulta $\quad \max_{[-4,4]} f = 192 = f(4) = f(-4)$

$$\min_{[-4,4]} f = -4 = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$$

A2 $\quad$ Evidentemente $\displaystyle\lim_{t\to 1} \operatorname{arctg}(2(t-1)) = 0$

Poi $\quad \displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{t^{-2}-1}{1-t^7} \underset{\substack{t-1=x \\ t\to 1^- \iff x\to 0^-}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{(1+x)^{-2}-1}{1-(1+x)^7}$

Ricordando la stima asintotica $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ per $x \to 0$, si ha

$(1+x)^{-2} - 1 \sim -2x \quad$ e $\quad 1-(1+x)^7 \sim -7x \quad$ per $x \to 0$

quindi $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{(1+x^{-2})-1}{1+(1+x)^7} = \boxed{\frac{2}{7}}$ che è il valore complessivo

del limite dato.

A3 $\quad$ Posto $w = z - 2i$, l'equazione diventa $w^4 = \frac{11}{i}$

le cui soluzioni sono le radici quarte di $\frac{11}{i}$.

Trasformiamo $\frac{11}{i}$ in forma esponenziale (o trigonometrica)

$$\frac{11}{i} = -11i = 11\, e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

Quindi $\quad w_k = \sqrt[4]{11}\; e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \dfrac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{4}, \; k=0,1,2,3$

Da qui $\quad z_k = w_k + 2i = \sqrt[4]{11}\, e^{i\theta_k} + 2i$

$$\theta_k = \frac{3}{8}\pi + \frac{k}{2}\pi \qquad k=0,1,2,3$$

A 4 $\quad f'(x) = \dfrac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2} = \dfrac{2\cos(2x)}{x} - \dfrac{\sin(2x)}{x^2}$

$$f''(x) = \frac{-4x\sin(2x) - 2\cos(2x)}{x^2} - \frac{2x^2\cos(2x) - 2x\sin(2x)}{x^4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} \; ; \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{16}{\pi^2} \; ; \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cdot\frac{4}{\pi} + 2\cdot\frac{64}{\pi^3}$$

Da qui

$$P_2\left(x; \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{8}{\pi^3}\left(8 - \pi^2\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

A5 $\quad$ Per l'eq. omogenea associata $u'' - 2u = 0$, risolvendo l'eq. caratteristica $\lambda^2 - 2 = 0$ troviamo $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ e l'integrale generale $u(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Una soluzione particolare dell' eq. diff. completa è della forma

$$u_p = A\cos t + B\sin t$$

Inserendo nell' equaz. troviamo

$$-A\cos t - B\sin t - 2A\cos t - 2B\sin t = 8\cos t$$

da cui $\begin{cases} -3A = 8 \\ -3B = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -\frac{8}{3} \\ B = 0 \end{cases}$

L'integrale generale dell'eq. completa è

$$u(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} - \frac{8}{3}\cos t$$

Imponendo infine le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(0) = c_1 + c_2 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} \\ u'(0) = \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 0 \end{cases} \qquad c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

La soluz. del PdC è $\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right) - \frac{8}{3}\cos t$

A6 $$\int_{-\pi}^{\pi} \left(2|x| + 7\cos x \, e^x\right) dx = 4\int_0^{\pi} x\,dx + 7\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, e^x \, dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \left[2x^2\right]_0^{\pi} = 2\pi^2$$

$$\underbrace{\int \cos x \, e^x dx}_{} \underset{\text{per parti}}{=} e^x \cos x + \int \sin x \, e^x \, dx \underset{\times\text{ parti}}{=} e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int \cos x \, e^x \, dx}_{}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c$$

$$I_2 = \left[\frac{7}{2} e^x (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{7}{2} e^{\pi}(-1) - \frac{7}{2} e^{-\pi}(-1)$$

Complessivamente, il valore dell'integrale è $2\pi^2 + \frac{7}{2}\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right)$

A7 La serie è a termini positivi, possiamo usare il CR. del confronto asintotico:

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-n = n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-1\right] \sim n\left(4\cdot\frac{1}{n}\right)=4$$

per $n\to+\infty$

(dalla stima asintotica $(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x$ per $x\to 0$)

$$n^\alpha \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 1 = n^{\alpha-3} \quad \text{per } n\to+\infty$$

Pertanto
$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-n}{n^\alpha \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{4}{n^{\alpha-3}}$$

La serie data converge se e solo se converge la serie $4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-3}}$ e ciò avviene quando $\alpha-3>1$ ossia $\alpha>4$

A8
$$f(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{x}{3}\right)^x} = e^{x\ln\frac{x}{3}}$$

$$f'(x) = e^{x\ln\frac{x}{3}}\left(\ln\frac{x}{3}+x\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{x}{3}\right)^x\left(\ln\frac{x}{3}+1\right)$$

$$f(6)=2^6\;;\quad f'(6)=2^6(\ln 2+1)$$

La retta r ha equazione $y=2^6+2^6(\ln 2+1)(x-6)$

B1 La risposta corretta è D.

Infatti, per il T. della permanenza del segno, esistono sicuramente $a_1, b_1\in(a,b)$ t.c. $f(a_1)$ e $f(b_1)$ hanno lo stesso segno dei limiti $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$, rispettivamente.

In particolare $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$ e quindi è possibile applicare il T. degli zeri a $f:[a_1, b_1]\to\mathbb{R}$.

B2 Dall' espressione di $P_2(x;0)$ deduciamo $f(0)=1$

$f'(0)=1$ e $f''(0)=2$.

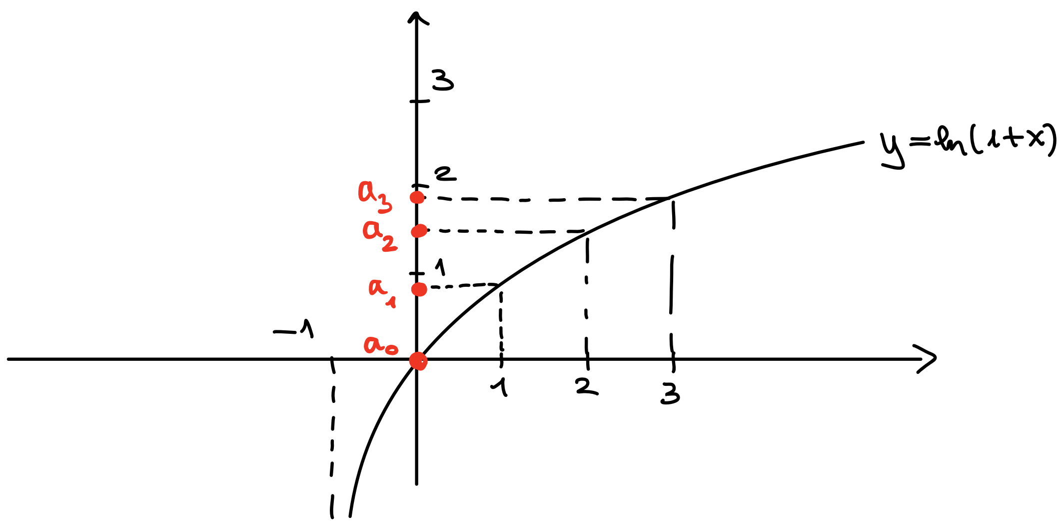
Con la regola di derivazione della f. composta:

$g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$ e $g''(x)=[f''(x)+(f'(x))^2]\,e^{f(x)}$

da cui $g'(0)=f'(0)e^{f(0)}=e$; $g''(0)=(2+1)e=3e$

La risposta corretta è **D**.

B3 Rappresentiamo i punti $a_n=\ln(1+n)$, $n=0,1,2,\dots$



Aggiungendo la quantità $(-1)^{n+1}$, il risultato è che ogni a_n con n pari è traslato in basso di 1 e ogni a_n con n dispari è traslato in alto di 1.

Pertanto $\inf S=-1$; risposta corretta **C**

B4 Dalla cond. necessaria di convergenza $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ (cond. non sufficiente!)

La risposta corretta è **D**.

B5 f è derivabile in x_0 se esiste ed è finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Quindi la risposta corretta è **B**

B6 Dal Teorema fond. del calcolo integrale e dal teorema di derivazione della f. composta si ha

$$F'(x) = f(x^2)$$
$$F''(x) = f'(x^2)\cdot 2x$$

Quindi

$$F(-1) = 0 \,; \qquad F'(-1) = f(1) = 2 \,; \qquad F''(-1) = f'(1)\cdot(-2) = 6$$

La f. di Taylor di ordine 2 centrata in -1 per F

$$F(x) = F(-1) + F'(-1)(x+1) + \frac{1}{2}F''(-1)(x+1)^2 + o(x+1)^2 \quad \text{per } x\to -1$$

diventa

$$F(x) = 2(x+1) + 3(x+1)^2 + o(x+1)^2 \qquad \text{per } x\to-1$$

che è la risposta **D**

B7 La risposta corretta è **C** :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$$

B8 Per il teorema delle successioni monotone

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

Dunque la risposta corretta è **A**.