A1

$$z^4 + 4iz^2 - 4 = (z^2 + 2i)^2 = 0 \iff z^2 + 2i = 0$$

$$\iff z^2 = -2i$$

Occorre determinare le radici quadrate di $-2i$.

$$-2i = 2 e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

Quindi le radici quadrate di $-2i$ sono:

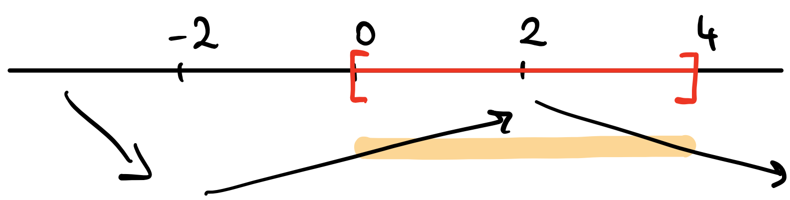
$$\pm \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \pm (1 - i)$$

A2

$$f'(x) = -3x^2 + 12 \geq 0 \iff x^2 - 4 \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$$

Graficamente:



Nell'intervallo $[0,4]$ f assume massimo e minimo assoluti per il T. di Weierstrass. Dal grafico precedente si vede che

$$\max_{[0,4]} f = f(2) = \boxed{16} \quad ; \quad \min_{[0,2]} f = \min\{f(0), f(4)\} = \boxed{-16}$$

A3

$$\lim_{x \to 2} 2\cosh(x-2) = 2\underbrace{\cosh(0)}_{=1} = 2$$

Utilizzando il cambio di variabile $t = x - 2$ si ha $x = t + 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1) - 2\,\mathrm{sen}(x-2)}{(x-1)^2 - (1+\mathrm{senh}(x-2))} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - 2\,\mathrm{sen}\,t}{(1+t)^2 - 1 - \mathrm{senh}\,t}$$

$$\ln(1+t) - 2\,\mathrm{sen}\,t = t - 2t + o(t) = -t + o(t)$$

$$(1+t)^2 - 1 - \mathrm{senh}\,t = t^2 + 2t - \mathrm{senh}\,t = t^2 + 2t - t + o(t^2)$$
$$= t + o(t)$$

Pertanto $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - 2\,\mathrm{sen}\,t}{(1+t)^2 - 1 - \mathrm{senh}\,t} = -1$

Il limite assegnato è uguale a $\boxed{1}$

A4

$$\int_0^6 \frac{1}{4+x^2}\left(1 + \mathrm{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \int_0^6 \frac{1}{4+x^2}\,dx + \int_0^6 \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^6 + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{arctg}^3\left(\frac{x}{2}\right)}{3}\right]_0^6 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3 + \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}^3(3).$$

(*) $$\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

A5

L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$x_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$f(x_0) = \frac{\pi}{8}\, tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

$$f'(x) = \tan 2x + x \cdot \frac{2}{\cos^2(2x)} \longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2}$$

da cui $\quad \boxed{y = \frac{\pi}{8} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}$

A6

Usando le stime asintotiche notevoli:

$$\sin\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)\right] \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n^4} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Pertanto $\quad n^\alpha \sin\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)\right] \sim \frac{n^\alpha}{n^4} = \frac{1}{n^{4-\alpha}} \quad$ per $n \to +\infty$

e, per il crit. di confr. asintotico, la serie data converge se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4-\alpha}}$ converge, ossia se e solo se $(4 - \alpha > 1)$ $\boxed{\alpha < 3}$

A7

Il polinomio richiesto è dato da

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \sin(7x) + e^{2x} \cdot 7 \cos(7x)$$

$$f''(x) = 4e^{2x} \sin(7x) + 28\, e^{2x} \cos(7x) - 49\, e^{2x} \sin(7x)$$

da cui

$$f'\left(\frac{\pi}{14}\right) = 2e^{\pi/7} \qquad ; \quad f''\left(\frac{\pi}{14}\right) = -45\, e^{\pi/7}$$

e quindi

$$P_2(x) = e^{\pi/7} + 2e^{\pi/7}\left(x - \frac{\pi}{14}\right) - \frac{45}{2} e^{\pi/7} \left(x - \frac{\pi}{14}\right)^2$$

A8

Determiniamo l'integrale generale dell'eq. omogenea associata:

$$u'' - 4u' + 4u = 0$$

L'eq. caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ che ammette due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Quindi l'int. generale dell'eq. omogenea è

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo una soluzione particolare dell'eq. completa

$$u'' - 4u' + 4u = e^{3t} \qquad (*)$$

con il metodo di somiglianza : $u_p(t) = Ae^{3t}$

Imponendo che u_p sia soluzione di (*) troviamo:

$$9Ae^{3t} - 12Ae^{3t} + 4Ae^{3t} = e^{3t}$$

che è soddisfatta $\forall t \in \mathbb{R}$ se e solo se $A = 1$.

L'integrale generale dell'eq. completa è

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^{3t}$$

Imponiamo le cond. iniziali:

$$\begin{cases} u(0) = c_1 + 1 = 1 \\ u'(0) = 2c_1 + c_2 + 3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

$$\left(u'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t} + 3e^{3t} \right)$$

La soluzione del PdC è $u(t) = -t e^{2t} + e^{3t}$

B1 Osserviamo che la condizione $x f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ implica $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ e $f(x) < 0 \ \forall x < 0$.

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F'(x) = (3 - \cos x) f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dato che $3 - \cos x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, risulta

$F'(x) > 0 \quad \forall x > 0 \quad$ e $\quad F'(x) < 0 \quad \forall x < 0$

Perciò F è strett. crescente per $x > 0$ e strett. decrescente per $x < 0$. Ne segue che $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per F (da notare che F è continua in $\mathbb{R}$)

B2 La condizione necessaria di convergenza implica $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n a_n = 0$ che equivale a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

B3 $\boxed{B}$: dalla teoria delle funzioni concave/convesse

B4
$$a_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n+1} & n \text{ pari } (n=0,2,4,..) \\ 2 - \frac{1}{n+1} & n \text{ dispari } (n=1,3,5,...) \end{cases}$$

$$\sup a_n = \max a_n = 3 \quad (= a_0)$$

B5 Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

Perciò:

$f(x) \sim x^2 \tanh x$ per $x\to+\infty \iff f(x) \sim x^2$ per $x\to+\infty$

La risposta corretta è $\boxed{D}$

B6 La risposta corretta è $\boxed{B}$; è facile trovare controesempi alle altre risposte

B7 Ricordiamo che $P_3(x;0) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, in generale.

Nel caso specifico $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{(k!)^2}$ da cui $f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!}$ e $f'''(0) = \frac{1}{6}$.

B8 La risposta corretta è $\boxed{C}$. È utile cercare i controesempi alle altre risposte.