1. Consideriamo l'equazione

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{49}\left(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)iz$$

Possiamo riscriverla come

$$\frac{1}{iz^2} = \frac{1}{49}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1}{iz^2} = \frac{1}{49}\, e^{i\pi/6}$$

$$iz^2 = 49\, e^{-i\pi/6}$$

$$z^2 = -49\, i\, e^{-i\pi/6}$$

$$z^2 = 49\, e^{\frac{3}{2}\pi i}\, e^{-i\pi/6}$$

$$z^2 = 49\, e^{\frac{4}{3}\pi i} = 49\left[\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right]$$

Pertanto

$$Z = \sqrt{49}\left[\cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{2}\right)\right]$$

con $k = 0, 1$; abbiamo

$$z_0 = 7\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 7\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_1 = 7\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 7\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Concludiamo che la differenza fra le due soluzioni è

$$z_0 - z_1 = 7\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 7(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$|z_0 - z_1| = 7\sqrt{1+3} = 14$$

(2) Consideriamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln(9+n) - \ln n\right)\sqrt[n]{n^4}}{(n-1)!\left(\sqrt[9]{1+\frac{1}{n!}} - 1\right)}$$

Per quanto riguarda il numeratore, osserviamo che

$$\begin{aligned}\ln(9+n) - \ln n &= \ln\left(n\left(1+\frac{9}{n}\right)\right) - \ln n \\ &= \cancel{\ln n} + \ln\left(1+\frac{9}{n}\right) - \cancel{\ln n} \\ &= \ln\left(1+\frac{9}{n}\right) = \frac{9}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

per $n \to +\infty$; inoltre

$$\sqrt[n]{n^4} = n^{4/n} = e^{\frac{4}{n}\ln n} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n\to\infty$$

Pertanto,

$$(\ln(9+n) - \ln n)\sqrt[n]{n^4} = \frac{9}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Per quanto riguarda il denominatore,

$$\sqrt[9]{1+\frac{1}{n!}} - 1 = \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{1/9} - 1$$

Consideriamo, ora, che per $t \to 0$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t),$$

da cui ricaviamo che

$$\sqrt[9]{1+\frac{1}{n!}} = 1 + \frac{1}{9}\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)$$

ed anche

$$\sqrt[9]{1+\frac{1}{n!}} - 1 = 1 + \frac{1}{9}\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right) - 1 = \frac{1}{9}\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Quindi

$$(n-1)!\left(\sqrt[9]{1+\frac{1}{n!}} - 1\right) =$$

$$= (n-1)!\left[\frac{1}{9}\,\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)\right] = \frac{1}{9}\,\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

In definitiva, dunque, ci riduciamo a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{9}{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{9}\cdot\cancel{\frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 9\cdot 9 = 81$$

(3) Consideriamo

$$\int_5^{10} \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right) \frac{[1-\cos(x-5)]^6}{[e^{x-5}-1]^\lambda}$$

Osserviamo che la funzione $\arctan\left(\frac{1}{x-5}\right)$ è limitata nell'intervallo $(5,10]$. Inoltre

$$\lim_{x\to 5^+} \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right) = \frac{\pi}{2}$$

quindi tale funzione può essere prolungata con continuità anche nel punto $x=5$ e non dà alcun problema alla convergenze dell'integrale.

Se, invece, consideriamo l'altro fattore, ossia la funzione $\frac{[1-\cos(x-5)]^6}{[e^{x-5}-1]^\lambda}$, osserviamo che nell' intorno destro di $x=5$ abbiamo una forma del tipo $\frac{0}{0}$ e dobbiamo, dunque, studiare il suo comportamento.

Poiché

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

abbiamo

$$\frac{[1-\cos(x-5)]^6}{[e^{x-5}-1]^\lambda} = \frac{\left[\frac{1}{2}(x-5)^2 + o((x-5)^3)\right]^6}{[x-5+o(x-5)]^\lambda}$$

$$\simeq \frac{1}{64}\frac{1}{(x-5)^{\lambda-12}}$$

e concludiamo che l' integrale improprio converge se $\lambda - 12 < 1$. Pertanto $\sup \Upsilon = 13$

④ Se consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{12\cos^2 x}$, è immediato osservare che si tratta di una funzione periodica, di periodo 2π. Pertanto, nella ricerca dei massimi e minimi possiamo limitarci a lavorare nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Inoltre

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \text{con} \quad g(x) = 12\cos^2 x$$

Poiché la funzione $h(t) = e^t$ è funzione crescente, per determinare i punti di massimo e di minimo di f, possiamo limitarci a determinare i punti di massimo e di minimo di g.

Infine, è immediato osservare che, nell' intervallo $[0, 2\pi]$, abbiamo

$$\min_{[0,2\pi]} 12\cos^2 x = 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\max_{[0,2\pi]} 12\cos^2 x = 12 = g(0) = g(\pi) = g(2\pi)$$

Pertanto, per quanto detto sopra, f assume il valore minimo in $\frac{\pi}{2}$ e in $\frac{3}{2}\pi$ e risulta $f(x_m) = e^0 = 1$, mentre f assume il valore massimo in $0, \pi, 2\pi$ e risulta $f(x_M) = e^{12}$

Quindi

$$\ln(f(x_M)) + f(x_m) = \ln e^{12} + 1 = 12 + 1 = 13$$

(5) $y'' + 9y' + 18y = 9e^{3x}$

Consideriamo l'equazione caratteristica; abbiamo

$$\lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 6) = 0 \implies \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -6$$

Pertanto

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-6x} + y_p$$

L'integrale particolare y_p ha espressione $y_p = Ae^{3x}$ con A costante da determinare. Abbiamo

$$y_p = Ae^{3x}, \quad y_p' = 3Ae^{3x}, \quad y_p'' = 9Ae^{3x}$$

da cui, sostituendo

$$9A\cancel{e^{3x}} + 27A\cancel{e^{3x}} + 18A\cancel{e^{3x}} = 9\cancel{e^{3x}}$$

$$54A = 9 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}$$

Quindi, l'integrale generale è

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-6x} + \frac{1}{6} e^{3x},$$

da cui

$$y' = -3C_1 e^{-3x} - 6C_2 e^{-6x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{6} = 0 \\ -3C_1 - 6C_2 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{6} \\ C_1 + 2C_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

da cui $C_1 = -\frac{1}{6}$, $C_2 = 0$. Pertanto, l'integrale particolare è $y = -\frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{3x}$, ossia $y = \frac{1}{3}\sinh(3x)$. Quindi $y(3) = \frac{1}{3}\sinh 9$ e

$$\frac{\sinh 9}{y(3)} = \frac{\sinh 9}{\frac{1}{3}\sinh 9} = 3$$

(6) $\displaystyle\int_8^{16} 2x \ln(x+8)\,dx$ Possiamo integrare per parti. Abbiamo

$$I = \left[x^2 \ln(x+8)\right]_8^{16} - \int_8^{16} x^2 \frac{1}{x+8}\,dx =$$

$$= \left[x^2 \ln(x+8)\right]_8^{16} - \int_8^{16} \frac{x^2-64}{x+8}\,dx - \int_8^{16} \frac{64}{x+8}\,dx$$

$$= \left[(x^2-64)\ln(x+8)\right]_8^{16} - \int_8^{16} (x-8)\,dx$$

$$= (256-64)\ln 24 - \left[\frac{x^2}{2} - 8x\right]_8^{16}$$

$$= 64 \cdot 3 \cdot \ln 24 - \left[\cancel{128} - \cancel{128} - 32 + 64\right]$$

$$= 64 \cdot 3 \cdot \ln 24 - 32$$

Quindi $\displaystyle\frac{I+32}{3\ln 24} = \frac{64 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{\ln 24} \cancel{-32} \cancel{+32}}{\cancel{3}\cancel{\ln 24}} = 64$

7 $f:(0,1)\to(0,+\infty)$ di classe C^2, concava.

Ricordiamo che per funzioni di classe C^2

$$f \text{ concava} \iff f'' \leq 0$$

Passando a

$$g:(0,1)\to\mathbb{R} \qquad g(x)= f(x)+\ln(f(x)),$$

per il Teorema di derivazione della funzione composta, abbiamo che anche g è di classe C^2. Quindi

$$g'(x)= f'(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$g''(x) = f''(x)+\frac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

Osserviamo che $f''\cdot f \leq 0$, $-(f')^2 \leq 0$

Pertanto

$$g'' \leq 0$$

quindi, per quanto ricordato sopra, g è anch'essa concava. La risposta corretta è la $\underline{a)}$.

(8) $f : [0, +\infty) \longrightarrow$ risulta $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$.

Questo significa che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0.$$

È chiaro che

$$\lim_{x \to +\infty} (x-3) f(x) = \lim_{x \to +\infty} x f(x)$$

quindi la risposta corretta è la <u>risposta a)</u>.

Osserviamo che se consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+2)}$

abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+1)\ln(x+2)} = 0$$

e quindi la funzione soddisfa le ipotesi date, ma contraddice b) e c), che sono, dunque, false.

La stessa funzione contraddice anche d); infatti

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x) f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x) \frac{1}{(x+1)\ln(x+2)} = 0$$

---

9 Per ipotesi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$.

Per la CN di convergenza, dunque, $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$

Poiché in un intorno di $t=0$

$$|\sin t| \leq |t|$$

concludiamo che, definitivamente

$$\sin a_n^2 \leq a_n^2$$

e per il Criterio del Confronto abbiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n^2) \quad \text{converge.}$$

Quindi la risposta corretta è la a)

c) è sicuramente falsa, perché da $\lim_{n \to \infty} a_n^2 = 0$ concludiamo che $\lim_{n\to\infty} \cos(a_n^2) = 1$ e la CN di convergenza è violata.

b) e d) sono entrambe in generale <u>false</u>: basta considerare la successione $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Poichè per la CN di convergenza $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, possiamo osservare che definitivamente risulterà $a_n^2 \leq |a_n|$ e quindi dalla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ non si può dire nulla su $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

---

(10) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dispari, limitata, integrabile in $[-1,1]$.

La risposta corretta è c): ogni funzione dispari, integrabile in un intervallo simmetrico, ha integrale nullo in tale intervallo.

Se consideriamo $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$, essa soddisfa le ipotesi, ma

1) $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists \implies$ b) è falsa

2) f non è monotona $\implies$ d) è falsa.

Se consideriamo, poi, $f(x) = \sin(2\pi x)$, essa soddisfa le ipotesi, ma

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[-\cos(2\pi x)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-1+1\right) = 0$$

e, dunque, anche a) è falsa.

---

11 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^2, il cui polinomio di Taylor

centrato in $x_0 = 1$ è

$$P_2(x;1) = 1 + x + x^2$$

Poiché

$$P_2(x;1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$= f(1) + f'(1)x - f'(1) + \frac{1}{2}f''(1)x^2 - f''(1)x + \frac{f''(1)}{2}$$

Uguagliando i termini corrispondenti, concludiamo che

$$\frac{f''(1)}{2}x^2 = 1 \implies f''(1) = 2$$

$$f'(1) - f''(1) = 1 \implies f'(1) - 2 = 1 \implies f'(1) = 3$$

$$f(1) - f'(1) + \frac{1}{2}f''(1) = 1 \implies f(1) - 3 + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2} = \cancel{1}$$

$$\implies f(1) = 3$$

Quindi è c) la risposta corretta

(12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile e t.c. $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

Consideriamo la quantità $\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$. Dalle ipotesi su f possiamo applicare il Teorema di Lagrange e concludere che $\forall\, x>1$ esiste $c \in (x, x^2)$ t.c.

$$\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x} = f'(c)$$

Se, ora, passiamo al limite per $x \to +\infty$, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} f'(c)$$

Poiché $c \in (x, x^2)$, è chiaro che se $x \to +\infty$, anche $c \to \infty$. Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} f'(c) = \lim_{c \to +\infty} f'(c).$$

Concludiamo, dunque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \lim_{c \to +\infty} f'(c) = \ell$$

e la risposta corretta è <u>b)</u>

Alternativamente, ma equivalentemente, preso $x > 1$, abbiamo, sempre per il Teorema di Lagrange,

$$f(x^2) = f(x) + f'(c) \cdot (x^2 - x)$$

dove $c \in (x, x^2)$. Quindi

$$\frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \frac{f(x) + f'(c)(x^2 - x) - f(x)}{x^2 - x}$$

$$= f'(c)$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} f'(c)$$

e concludiamo come prima