Analisi Matematica 1 - 15/02/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ☐ Cognome ☐ Nome ☐

Ing. Elettronica e Informatica ☐ Bioingegneria ☐ Ing. Industriale ☐

A1. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''-3y'+2y=0$.

Trovare la soluzione che soddisfa $y(0)=1, y'(0)=-1$

A2. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0=0$ di $f(x)=(\sin x)^2\ln(7+x)$.

A3. Data la funzione $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita come: $f(x)=x\cos(\ln(x^6))$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(e,f(e))$:

A4.* Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)\left(\sin(\frac{1}{2}x)-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{12}\sin x^3\right)}{\left[1-(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]^4}$

$\lim_{n\to+\infty}\dfrac{[7\arctan n+\arctan(1/n)]n}{\ln(1+2^n)}$

A5. Trovare le soluzioni $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ dell'equazione $z^2+2(Im(z))^2-12Re(z)+6\bar{z}=(Re(z))^2$:

Calcolare $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$:

A6.* Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definita da $f(x)=\begin{cases}0, & \text{se } x=0,\\ e^{-2/x}(x^2-3\cdot 2^2), & \text{se } x>0.\end{cases}$

Indicare l'intervallo in cui risulta $f(x)\le 0$.

Determinare il minimo assoluto m della f e l'unico punto x_m in cui esso è assunto.

A7. Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\alpha n}\left[1-\cos(\frac{2}{n})\right]^2}{7^n}$:

A8. Calcolare $I=\displaystyle\int_{-\frac{\ln 3}{4}}^{\frac{\ln 3}{4}}\frac{\arctan(e^{2x})}{(1+e^{4x})}e^{2x}\,dx.$

B1. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) \neq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ e $\lim_{z\to 2} g(z) = 4$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 1} g(f(x)) = 4$. $\boxed{\text{B}}$ Non esiste $\lim_{x\to 1} g(f(x))$. $\boxed{\text{C}}$ $g(f(1)) = 4$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 2} g(f(x)) = 4$.

B2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, convessa in $[a, b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f' è crescente in $[a, b]$. $\boxed{\text{B}}$ f è continua in (a, b). $\boxed{\text{C}}$ $f'' \geq 0$ in $[a, b]$. $\boxed{\text{D}}$ f è continua in $[a, b]$.

B3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ e sia $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, F è derivabile tre volte in x_0. $\boxed{\text{B}}$ Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $F'(x) = f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ F è decrescente. $\boxed{\text{D}}$ $F(0) = 0$.

B4. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{3} \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi n)}{3} \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
$\boxed{\text{B}}$ La serie converge assolutamente. $\boxed{\text{C}}$ La serie diverge. $\boxed{\text{D}}$ La serie converge semplicemente.

B5. * Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali definita da $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n^3 - a_n, & n \geq 0, \\ a_o = 3. \end{cases}$ Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -2$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

B6. Sia f una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x - 3x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.
$\boxed{\text{C}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\ln\big(1 + f(x)\big) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

B7. Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è limitata.
$\boxed{\text{B}}$ f non può essere iniettiva. $\boxed{\text{C}}$ f ha un punto stazionario. $\boxed{\text{D}}$ f non ha punti di estremo.

B8.* Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$ e $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ Se $f(0) = 0$, allora $f(x)g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x)g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ Se $f(0) = 0$, allora $\frac{g(x)}{f(x)} = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\frac{g(x)}{f(x)} = o(x^2)$ per $x \to 0$.

SOLUZIONE APPELLO ANALISI 1 15/2/24

$\boxed{A1}$ $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$

Eq. caratteristica associata : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$ per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tutte le soluzioni dell'equazione omogenea.

Per trovare la sol. con $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$, imponiamo

$$1 = y_0(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$-1 = y_0'(0) = 2c_1 + c_2 \Rightarrow 2(1-c_2) + c_2 = -1$$

$$\Rightarrow c_2 = 3 \quad c_1 = 1 - 3 = -2$$

$y_c(t) = -2e^{2t} + 3e^t$, sol del Pb di Cauchy con $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

$\boxed{A2}$ Pol Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ per

$$f(x) = (\sin x)^2 \log(7+x) = (\sin x)^2 \cdot \left[\log 7 + \log\left(1 + \frac{x}{7}\right)\right]$$

Usiamo gli sviluppi per $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow (\sin x)^2 = x^2 \underbrace{- \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{o(x^3)},$$

$$\log\left(1 + \frac{x}{7}\right) = \frac{x}{7} + o(x)$$

Dunque per $x \to 0$

$$(\sin x)^2 \left[\log 7 + \log\left(1 + \frac{x}{7}\right)\right] = (\log 7) x^2 + \frac{x^3}{7} + o(x^3)$$

Dunque $P_3^f(x, 0) = (\log 7) x^2 + \frac{x^3}{7}$.

Nota: ovviamente lo sviluppo dell'esercizio A2 andava bene anche calcolando a mano $f(0), f'(0), f''(0)$ $f'''(0)$

e $P_3^f(x,0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$.

Ma era più lungo come procedimento.

$\boxed{A3}$ $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x\cos(\log(x^6)) =$
$= x\cos(6\log x)$

Scrivere $T_e(x) = f(e) + f'(e)(x-e)$.

$f'(x) = \cos(6\log x) - \cancel{x}\sin(6\log x) \cdot \frac{6}{\cancel{x}}$
$= \cos(6\log x) - 6\sin(6\log x)$.

$f(e) = e\cos 6 \qquad f'(e) = \cos 6 - 6\sin 6$

$T_e(x) = e\cos 6 + (\cos 6 - 6\sin 6)(x-e)$.

$\boxed{A4}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+2x)\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{12}\sin x^3\right)}{\left[1-(1+\sin x)^{1/2}\right]^4} = L$

Ricordiamo gli sviluppi per $x \to 0$

$\log(1+2x) = 2x + o(x)$

$\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + o(x^3)$; $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\sin x^3 = x^3 + o(x^3)$

$(1+\sin x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\sin x + o(\sin x) = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

Dunque per $x \to 0$

NUMERATORE $\sim \quad 2x\left(\cancel{\frac{x}{2}} - \frac{x^3}{6\cdot 8} - \cancel{\frac{x}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{12}} - \cancel{\frac{x^3}{12}}\right) = -\frac{x^4}{24}$

DENOMINATORE $\sim \left[\frac{1}{2}x\right]^4 = \frac{x^4}{16}$

2

Dunque $L = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{24}}{\frac{x^4}{16}} = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{[7\arctan n + \arctan \frac{1}{n}]\, n}{\log(1+2^n)} = L_2$$

Notiamo che, per $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} [7\underbrace{\arctan n}_{\to \pi/2} + \underbrace{\arctan \frac{1}{n}}_{\to 0}] = 7\frac{\pi}{2}$$

Dunque NUMERATORE $\sim \frac{7}{2}\pi n$ per $n \to +\infty$

Invece, per $n \to +\infty$ $\log(1+2^n) = \log(2^n(1+\frac{1}{2^n})) = \log(2^n) + \log(1+\frac{1}{2^n})$

$= n\log 2 + \underbrace{\log(1+\frac{1}{2^n})}_{\to 0}$ quindi

DENOMINATORE $\sim n\log 2$ per $n \to +\infty$

In conclusione $L_2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{7}{2}\pi \cancel{n}}{\log 2\, \cancel{n}} = \frac{7\pi}{2\log 2}$

$\boxed{A5}$ $z^2 + 2(\operatorname{Im} z)^2 - 12\operatorname{Re} z + 6\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2$

In forma algebrica $z = x + yi$ $\operatorname{Im} z = y$ $\operatorname{Re} z = x$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ $\bar{z} = x - yi$

$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2y^2 - 12x + 6x - 6yi = x^2$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2} - y^2 + 2y^2 - 12x + 6x = \cancel{x^2} & \text{(i)} \\ 2xy - 6y = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(ii) $\to y = 0$ oppure $x = 3$

se $y = 0$ $\to$ dalla (i) ottengo $-6x = 0 \Rightarrow z_1 = 0$

Se $x=3$ dalla (i) ottengo $y^2-18=0$

quindi $y_{2,3}=\pm 3\sqrt{2}$ dunque $z_{2,3}=3\pm 3\sqrt{2}i$

$$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=0+2(9+18)=54$$

$\boxed{A6}$ $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ e^{-2/x}(x^2-\underbrace{3\cdot 4}_{=12}) & x>0\end{cases}$

- Dove $f\le 0$? $\iff$ $x^2-12\le 0$ $\iff$ $0\le x\le\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
  $(e\ x\ge 0)$

- Notiamo che per la ricerca di minimo di f, possiamo restringere lo studio a $[0,2\sqrt{3}]$.

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x}(x^2-12)=0$ quindi

f è continua in 0, e in tutto $[0,2\sqrt{3}]$.

Per Weierstraß f ammette massimo e minimo in $[0,2\sqrt{3}]$, ma siccome $f\le 0$ sappiamo già che il massimo è 0, raggiunto in $x_0=0$ o $x_M=2\sqrt{3}$.

Vediamo ora dove $f'(x)=0$ in $(0,2\sqrt{3})$ e il punto corrispondente sarà il punto di minimo.

$$f'(x)=e^{-2/x}\left\{2x+\frac{2}{x^2}(x^2-12)\right\}=$$

$$=\underbrace{e^{-2/x}}_{>0}\left\{2x+2-\frac{24}{x^2}\right\}=0 \iff x=2\in(0,2\sqrt{3})$$

Dunque $x_{min}=2$ e $f(x_{min})=\frac{1}{e}(4-12)=-\frac{8}{e}$

A7| $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\alpha n}\left[1-\cos\frac{2}{n}\right]^2}{7^n} =$ ③

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[1-\cos\frac{2}{n}\right]^2}{\left(\frac{7}{e^\alpha}\right)^n}$$

Usiamo il confronto asintotico, e notiamo che

$$\left[1-\cos\frac{2}{n}\right]^2 \sim \left[\frac{4}{n^2}\right]^2 \sim \frac{16}{n^4}$$

quindi basta studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\left(\frac{7}{e^\alpha}\right)^n n^4}.$$

Se $\frac{7}{e^\alpha} > 1 \Rightarrow$ domina il termine esponenziale $\Rightarrow$ la serie converge.

Se $\frac{7}{e^\alpha} = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} < +\infty$

Se $\frac{7}{e^\alpha} < 1 \Rightarrow$ domina termine esponenziale e la serie diverge

CONVERGENZA $\Leftrightarrow \frac{7}{e^\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow 7 \geq e^\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha \leq \log 7.$

Nota: cosa vuol dire "domina il termine esponenziale"

Se $\frac{7}{e^\alpha} = b > 1 \Rightarrow \exists\, b' \in (1, b)$ tc

$(b^n n^4)^{-1} = o\left((b')^{-n}\right)$ e siccome $\sum \frac{1}{(b')^n} < +\infty$

allora anche $\sum \frac{1}{b^n n^4} < +\infty$

A8

$$I = \int_{-\frac{\log 3}{4}}^{\frac{\log 3}{4}} \frac{\arctan(e^{2x})}{(1+e^{4x})} e^{2x}\,dx$$

Sostituzione $y = e^{2x}$ $\quad dy = 2e^{2x}\,dx$ $\qquad x = \frac{\log 3}{4}\ \ y = \sqrt{3}$

$\qquad x = -\frac{\log 3}{4}\ \ y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$I = \frac{1}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan y}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{(\arctan y)^2}{2}\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left((\arctan\sqrt{3})^2 - \left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{3}{36} = \frac{\pi^2}{48}\,.$$

$\boxed{B1}$ Per proprietà limiti di funzioni composte, perché $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{z\to 2} g(z) = 4$$

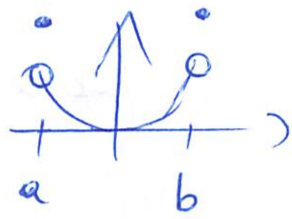
RISPOSTA CORRETTA: $\boxed{A}$

$\boxed{B2}$ La risposta corretta è $\boxed{B}$ perché una funzione convessa è sempre continua nell'intervallo <u>aperto</u>

Controesempio a A: $f(x) = |x|$, non derivabile ma convessa

" C: $f(x) = |x|$ non deriv. 2 volte ma convessa

" D:



convessa ma <u>non</u> continua negli estremi

$\boxed{B3}$ Per teo fond. calcolo integrale, $F(x) = \int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt$

$F'(x) = -f(x)$ quindi F' è C^2 e allora F è derivabile tre volte in tutto $\mathbb{R}$.

La risposta corretta è $\boxed{A}$

$\boxed{B4}$ Notiamo che $\cos(\pi n) = (-1)^n$.

La serie $\sum \frac{1}{3} \arctan\sqrt{\frac{1}{n+1}}$ è equivalente a $\sum \frac{1}{3\sqrt{n+1}} = +\infty$

quindi non c'è convergenza assoluta.

Notando che $n \longmapsto \arctan\sqrt{\frac{1}{n+1}}$ è decrescente

per criterio di Leibniz la serie converge SEMPLICEMENTE: $\boxed{D}$

$\boxed{B5}$ Notiamo che la funzione

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$ è crescente (in $(0,+\infty)$) se e solo se $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ (in $(0,+\infty)$)

Notiamo che $a_0 = 3 > \sqrt{\frac{2}{3}}$ quindi $a_1 \geq a_0 = 3$, e così via

dunque (a_n) è crescente, e ha limite finito o infinito per $n \to +\infty$.

Escludiamo subito A e B, dunque ($a_n \geq 0$ $\forall n$!)

Escludiamo anche C perché $a_0 = 3 > 2$ e (a_n) crescente.

Dunque la risposta esatta è $\boxed{D}$

$\boxed{B6}$ $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

$$\log(1+f(x)) = f(x) - \frac{f(x)^2}{2} + o(f(x)^2) =$$

per $f(x) \to 0$ (e $f(x) \to 0$ per $x \to 0$!)

$$= x - x^2 + o(x^2) - \frac{(x - x^2 + o(x^2))^2}{2} + o(x^2)$$

$$= x - x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Dunque la risposta corretta è $\boxed{B}$

$\boxed{B7}$ Siccome $f \in C^1(\mathbb{R})$, se f avesse un punto x_0 di massimo o di minimo, per Fermat $f'(x_0) = 0$.

(si noti che x_0 è sempre interno a $\mathbb{R}$)

Dunque la risposta corretta è $\boxed{D}$ perché se $f'(x) \neq 0$ $\forall x$ f <u>non</u> può avere punti di estremo.

B8 | Siccome f è derivabile, posso sviluppare (5)

per $x \to 0$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.

Studiamo $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(f(0)+f'(0)x+o(x))}{x} \cdot \frac{g(x)}{x}$

se $f(0) \neq 0$ resta $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{f(0)}{x} \frac{g(x)}{x} =$ DIPENDE DA f!

?? $\quad \to 0$

se $f(0)=0$ otteniamo $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{f'(0)\cancel{x}}{\cancel{x}} \frac{g(x)}{x} = 0$

$\mathbb{R} \quad \to 0$

quindi se $f(0)=0 \implies f(x)g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$

risposta corretta è $\boxed{A}$

(Per esercizio, trovate controesempi espliciti a B, C, D).