A1) Calcolare il valore di

$$\int_{-1}^{1} x^7 + 2|x| + 7x e^{7x} \, dx .$$

Osserviamo che

$$\int_{-1}^{1} x^7 \, dx = 0 \qquad \text{perché } x^7 \text{ è dispari}$$

$$\int_{-1}^{1} 2|x| dx = 4\int_{0}^{1} |x| dx = 4\int_{0}^{1} x \, dx = \cancel{4}^{2} \frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 = 2$$

perché $2|x|$ è pari. Rimane l'ultimo integrale.

Abbiamo

$$\int_{-1}^{1} 7x e^{7x} dx = (\text{per parti}) = x e^{7x}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{7x} \, dx =$$

$$= e^7 - (-1)e^{-7} - \frac{1}{7}e^{7x}\Big|_{-1}^{1} = e^7 + e^{-7} - \frac{1}{7}(e^7 - e^{-7})$$

Quindi, concludendo

$$\int_{-1}^{1} (x^7 + 2|x| + 7x e^{7x})\,dx = 2 + e^7 + e^{-7} - \frac{1}{7}(e^7 - e^{-7})$$

$$= 2 + 2\cosh 7 - \frac{2}{7}\sinh 7$$

A2) $f : [2,6] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2x^2 - 4)\ln\left(\frac{3x}{2}\right)$.

Determiniamo il massimo e il minimo assoluti di f in $[2,6]$. Osserviamo che m e M esistono sicuramente per il Teorema di Weierstrass, perché f è continua su un intervallo chiuso e limitato.

Calcoliamo f'. Abbiamo

$$f'(x) = 4x \ln\left(\frac{3x}{2}\right) + (2x^2-4)\cdot\frac{1}{x}$$

È facile verificare che $\forall x \in [2,6]$ è $f'(x) > 0$.

Pertanto f è strettamente crescente in $[2,6]$ e

$$m = f(2) = 4\ln 3,$$

$$M = f(6) = 68 \ln 9 = 136 \ln 3.$$

A3) $f : (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{16-x^2}\right)$

La retta r cercata ha equazione

$$y - f(1) = f'(1)\,(x-1)$$

Pertanto

$$f(1) = \ln \frac{3}{15} = \ln \frac{1}{5} = -\ln 5$$

Poiché

$$f(x) = \ln(4-x^2) - \ln(16-x^2)$$

abbiamo

$$f'(x) = \frac{-2x}{4-x^2} - \frac{-2x}{16-x^2}$$

$$f'(1) = \frac{-2}{3} - \frac{-2}{15} = \frac{-10+2}{15} = -\frac{8}{15}$$

Quindi

$$r: \quad y + \ln 5 = -\frac{8}{15}(x-1)$$

Ponendo $x = 0$ nell' equazione della retta, determiniamo l'ordinata del punto P, intersezione di r con l'asse delle y. Abbiamo

$$y_P + \ln 5 = \frac{8}{15} \implies y_P = \frac{8}{15} - \ln 5$$

A4

$$\begin{cases} u' + 7u = 2e^t \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Se riscriviamo l'equazione differenziale come

$$u' = -7u + 2e^t,$$

dalla formula di risoluzione ricaviamo l'espressione dell'integrale generale. Dunque,

$$u = e^{\int -7dt} \left[C + \int 2e^t e^{\int 7dt} dt \right]$$

$$v = e^{-7t}\left[C + 2\int e^{t}\cdot e^{7t}\,dt\right]$$

$$= e^{-7t}\left[C + \frac{2}{8}e^{8t}\right]$$

$$v = Ce^{-7t} + \frac{1}{4}e^{t}$$

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$, abbiamo

$$0 = C + 1/4 \implies C = -1/4$$

e la soluzione cercata è $\quad v(t) = -\frac{1}{4}e^{-7t} + \frac{1}{4}e^{t}$

A5) Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\tanh(2x) + \frac{(e^{7x}-1-x)(\cos x - 1)}{x - \sin x}\right)$$

Osserviamo che possiamo riscrivere il limite come

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \tanh(2x)}_{=0} + \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{7x}-1-x)(\cos x - 1)}{x-\sin x}$$

Ci riduciamo, dunque, al calcolo del secondo limite.

Dagli sviluppi noti, otteniamo che

$$e^{7x}-1-x = \cancel{1} + 7x + o(x) \cancel{-1} - x = 6x + o(x)$$

$$\cos x - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \cancel{-1} = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$x - \sin x = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Pertanto, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(6x+o(x))\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{\frac{x^3}{6}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^3}{\frac{x^3}{6}} =$$

$$= -18$$

A6 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(1-x)\sin(1-x)$

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$f(x) = \frac{1}{2}\, 2\cos(1-x)\sin(1-x) = \frac{1}{2}\sin(2-2x)$$

Pertanto

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(2-1) = \frac{1}{2}\sin 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2)\cos(2-2x) = -\cos(2-2x)$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\cos 1$$

$$f''(x) = -2\sin(2-2x)$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = -2\sin 1$$

Poiché

$$P_2\left(x; \tfrac{1}{2}\right) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2} f''\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2$$

concludiamo che

$$P_2\left(x; \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin 1 - \cos 1 \left(x-\tfrac{1}{2}\right) - \sin 1 \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

A 7) Cerchiamo i valori di α per cui convergono entrambe le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}+e^{-n}}{(n-\operatorname{arctg} n)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n^{1/2}}.$$

Se consideriamo la seconda serie, ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n^{1/2}}, \quad \text{posto} \quad a_n = \frac{e^{-\alpha n}}{n^{1/2}},$$

osserviamo che se $\alpha < 0$, abbiamo

$$a_n = \frac{e^{|\alpha| n}}{n^{1/2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

e la CN di convergenza è violata. Se $\alpha = 0$, abbiamo

$$a_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$ e la serie non può convergere

perché l'esponente $1/2$ è minore di 1.

Infine, se $\alpha > 0$, abbiamo

$$a_n = \frac{e^{-\alpha n}}{n^{1/2}} < \left(\frac{1}{e^{\alpha}}\right)^n$$

e poiché $\frac{1}{e^{\alpha}} < 1$, la serie converge, perché maggiorata da una serie geometrica con ragione minore di 1. In definitiva, dunque, la seconda serie converge $\forall \alpha > 0$.

Teniamo conto di questo e consideriamo la prima serie. Posto

$$b_n = \frac{n^\alpha + e^{-n}}{(n - \operatorname{arctg} n)^2},$$

per $\alpha > 0$ abbiamo che

$$b_n \sim \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

e perché la serie converga, dobbiamo richiedere che

$$2-\alpha > 1 \implies \alpha < 1 .$$

Pertanto, le due serie convergono contemporaneamente per

$$0 < \alpha < 1$$

A8) Dobbiamo risolvere in $\mathbb{C}$

$$\bar{z}^2 - i\,\mathrm{Im}(z^2) = 4iz - (\mathrm{Im}\, z)^2$$

Se poniamo

$$z = x+iy \implies \bar{z} = x-iy$$

$$\implies \mathrm{Im}\, z = y$$

abbiamo

$$(x-iy)^2 - i\,\mathrm{Im}\left[(x+iy)^2\right] = 4i(x+iy) - y^2$$

$$x^2 - y^2 - 2ixy - i\,\mathrm{Im}\left[x^2 - y^2 + 2ixy\right]$$

$$= 4ix - 4y - y^2$$

$$x^2 - \cancel{y^2} - 2ixy - i(2xy) = 4ix - 4y - \cancel{y^2}$$

$$x^2 - 4ixy = 4ix - 4y$$

Eguagliando parte reale e parte immaginaria, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 = -4y \\ -xy = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = -4y \\ x(y+1) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ $\quad$ $y = -1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} z_1 &= 2 - i \\ z_2 &= -2 - i \end{aligned}$$

B1) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali t.c. $\forall M > 0$ $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n| > M$ $\forall n > \nu$.

Osserviamo che dalle ipotesi, otteniamo direttamente che

$\forall M > 0$ $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n|^2 > M^2$ $\forall n > \nu$

Poiché

$$|a_n|^2 = a_n^2$$

dalla definizione di limite concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = +\infty,$$

ossia $\boxed{A}$

$\boxed{B}$ è falsa: basta infatti considerare

$$a_n = (-1)^n n$$

per trovare una successione che verifica le ipotesi e non è inferiormente limitata.

$\boxed{C}$ è falsa per lo stesso esempio di $\boxed{B}$; la successione $a_n = (-1)^n n$ tende a ∞ (senza segno)

Infine, se consideriamo

$$a_n = n$$

è chiaro che le ipotesi sono verificate e $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ (e non ∞ (senza segno)).

e quindi $\boxed{D}$ è falsa

B2) Poiché $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, per definizione di o, ciò vuol dire che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poiché, ovviamente, $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{g(x)} = 1$, abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{g(x)}$$

$$= 1 + 0 = 1.$$

Quindi, la risposta corretta è $\boxed{A}$

B3) $F(x) = \int_0^x t^4 \ln(1+t^2)\, dt$

Per il Teorema fondamentale del calcolo,

$$F'(x) = x^4 \ln(1+x^2)$$

ed è immediato verificare che

$$F'(0) = 0$$

[quindi $x = 0$ è punto stazionario e $\boxed{C}$ è falsa] e

$\forall x \neq 0 \qquad F'(x) > 0$

Quindi F è monotona, strettamente crescente e non ammette né massimo, né minimo. La risposta corretta è, dunque, $\boxed{D}$.

Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} t^4 \ln(1+t^2)\,dt = +\infty$$

è chiaro che F non è limitata e $\boxed{B}$ è falsa.

Inoltre, poiché

$$\ln(1+t^2) = t^2 + o(t^2),$$

abbiamo

$$F(x) = \int_0^x t^4 \ln(1+t^2)\,dt$$

$$= \int_0^x t^4 \left[t^2 + o(t^2) \right] dt = \int_0^x (t^6 + o(t^6))\,dt$$

$$= \frac{1}{7} x^7 + o(x^7)$$

e $\boxed{A}$ è falsa

$\boxed{B4}$ Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, per la CN di convergenza, abbiamo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Da qui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+|a_n|} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{2}{2} = 1$$

e la risposta corretta è $\boxed{D}$

$\boxed{A}$ è falsa: basta considerare $\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1}{n+1}$.

È chiaro che la serie converge ma $|a_n| = \frac{1}{n+1}$ che <u>non</u> è $o(\frac{1}{n})$.

$\boxed{B}$ è falsa per lo stesso controesempio di $\boxed{A}$

$\boxed{C}$ è falsa: se consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$, la serie converge per il criterio di Leibniz, ma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e la serie <u>non</u> converge.

B5) $S = \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 < 3 \} \cap \{ x_n = 3 - \sin^2 (n \frac{\pi}{2}) \}$

Osserviamo che

$$\{ q \in \mathbb{Q} : q^2 < 3 \} = \{ q \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < q < \sqrt{3} \}$$

e

$$\{ x_n = 3 - \sin^2 (n \tfrac{\pi}{2}) \} = \left\{ \begin{array}{ll} x_{2k} = 3, & \\ x_{2k+1} = 2 & \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Quindi l'intersezione dei due insiemi è vuoto, ossia $S = \emptyset$.

Qui c'è stato purtroppo un errore di stampa, di cui nessuno (docenti e studenti) sembra essersi

accorto prima della correzione. Nel preparare l'esercizio, infatti, l'intenzione era di considerare l'unione $\cup$ e non l'intersezione $\cap$.
Se si considera l'unione, è chiaro che

$$\sup_{\mathbb{R}} S = 3$$

Se si considera l'intersezione, poiché $S = \emptyset$, risulta per definizione

$$\sup_{\mathbb{R}} S = -\infty$$

che però non era prevista come risposta. Qui abbiamo considerato accettabile la risposta $\nexists \sup_{\mathbb{R}} S$.

Ci scusiamo con tutti per l'errore.

B6) Per il Teorema di Fermat, la risposta corretta è $\boxed{A}$

$\boxed{B}$ non è corretta, perché la funzione potrebbe avere $f' > 0$ in tutto l'intervallo I.

$\boxed{C}$ non è corretta, perché x_0 potrebbe essere di massimo locale, senza che f sia derivabile in x_0.

$\boxed{D}$ non ha senso.

B7) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, continua in (a,b).

A] é falsa: pensiamo a $(a,b) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $f(x) = \tan x$. È chiaro che f non ha massimo o minimo in (a,b).

C] è falsa: pensiamo a $(a,b) = (-1,1)$ e $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. In questo caso f ha minimo, ma non ha massimo.

D] è falsa: pensiamo a $(a,b) = (0,1)$ e $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Sappiamo che $\nexists \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$

Quindi, ragionando per esclusione, $\boxed{B}$ è la risposta corretta. Possiamo arrivare al risultato con_ che direttamente. Infatti, poiché f è continua in (a,b), $\forall \varepsilon > 0$ è anche continua in $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ che è chiuso e possiamo anche considerare limitato, senza perdita di generalità. Per il Teorema di Weierstrass, f ha minimo e massimo assoluti in $[a+\varepsilon, b-\epsilon]$. Poiché $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < l$, il minimo assoluto in $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ sarà esso stesso minore di l e quindi, ritornando all'intervallo (a,b) e tenendo conto che $\lim_{x \to a^+} f = \lim_{x \to b^-} f = l$, necessariamente il minimo assoluto di f in $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ è anche minimo per f in tutto (a,b).

B6) $\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(2k)}(0) = 2k, \quad f^{(2k+1)}(0) = 0$

Osserviamo che questo implica che

$$f(0) = 0 \qquad [\text{corrisponde a } k=0]$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 2$$

Considerando g, abbiamo

$$g(x) = \ln(1+f(x)), \qquad g(0) = \ln(1+f(0)) = \ln 1 = 0$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)}, \qquad g'(0) = \frac{f'(0)}{1+f(0)} = 0$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)[1+f(x)] - (f'(x))^2}{(1+f(x))^2},$$

$$g''(0) = \frac{f''(0)\left[1+f(0)\right] - \left(f'(0)\right)^2}{\left(1+f(0)\right)^2} = f''(0) = 2$$

Quindi

$$P_2(x;0) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2$$

$$= 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2x^2 = x^2$$

e la risposta corretta è $\boxed{C}$.