APPELLO ANALISI 1 25/1/24

$\boxed{A1}$ $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^5}{6} + e^{x-1} + 6\log x$

Notiamo subito che f è derivabile e
$f'(x) = \frac{5}{6}x^4 + e^{x-1} + \frac{6}{x} > 0$ in $(0,+\infty)$
Quindi f è strett. crescente $\Rightarrow$ invertibile

Per trovare $x_0 = f^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$ cerco x_0 tale che
$f(x_0) = \frac{7}{6}$ ovvero $\frac{x_0^5}{6} + e^{x_0-1} + 6\log x_0 = \frac{7}{6}$
e vedo che $x_0 = 1$ va bene.
(Si noti che $0 \notin (0,+\infty)$ quindi non era un tentativo ammissibile)
Dunque $f^{-1}\left(\frac{7}{6}\right) = 1$.
Ricordiamo la derivata della funz. inversa
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ $y = f(x)$

Dunque $(f^{-1})'\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{5}{6}+1+6} = \frac{6}{47}$

$\boxed{A2}$ $$y'(x) + \frac{x^9}{x^{10}+1}\, y(x) = x^9$$

Eq. diff. lineare del primo ordine.

$$A(x) = \int_0^x \frac{s^9}{s^{10}+1}\, ds = 1 \log(s^{10}+1)\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{10}\log(x^{10}+1) = \log(x^{10}+1)^{1/10}$$

$$e^{A(x)} = (x^{10}+1)^{1/10}$$

Oss. Si noti che $x^{10}+1 > 0$ sempre quindi l'eq. diff è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\,(x^{10}+1)^{1/10}\right) = (x^{10}+1)^{1/10}\left(y'(x) + \frac{x^9}{x^{10}+1} y(x)\right)$$

$$= x^9 (x^{10}+1)^{1/10}.$$ Integro fra 0 e x:

$$y(x)\,(x^{10}+1)^{1/10} - y(0) = \int_0^x s^9 (s^{10}+1)^{1/10}\, ds$$

$$= \int_0^{x^{10}} \frac{1}{10}(z+1)^{1/10}\, dz$$ $\quad z = s^{10}$, $dz = 10 s^9 ds$

$$= \frac{1}{\cancel{10}} \frac{\cancel{10}}{11} (z+1)^{11/10} \Big|_0^{x^{10}} = \frac{(x^{10}+1)^{11/10}}{11} - \frac{1}{11}$$

Dunque $y(x) = \boxed{y(0)} (x^{10}+1)^{-1/10} + \frac{(x^{10}+1) - (x^{10}+1)^{-1/10}}{11}$

$y(0)$ è arbitrario quindi tutte le soluzioni sono $y(x) = C (x^{10}+1)^{-1/10} + \frac{(x^{10}+1) - (x^{10}+1)^{-1/10}}{11}$

al variare di $C \in \mathbb{R}$

Soluzione con $y(0) = 1$ è

$$y(x) = \frac{x^{10}+1}{11} + \frac{10}{11} (x^{10}+1)^{-1/10}$$

$\boxed{A3}$ Calcolare $A = \left|\frac{6+6i}{1-i}\right| = 6\left|\frac{1+i}{1-i}\right|$

Riscrivo $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

$\Rightarrow \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = |i| = 1 \quad \Rightarrow A = 6$

Risolviamo ora

$$|z|\left(z^7 - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i/2\right)\right) = 0$$

ovvero $|z| = 0 \longrightarrow z = 0$ è sol.

oppure $z^7 = 6\, e^{i\pi/6}$

In forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$

$$z^7 = \rho^7 e^{i7\theta} = 6 e^{i\pi/6}$$

$$\begin{cases} \rho^7 = 6 & \Rightarrow \rho = 6^{1/7} \\ 7\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \Rightarrow \vartheta_k = \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \end{cases}$$

$k = 0, 1, \dots, 6.$

Soluzioni:

$z_k = 6^{1/7} e^{i\vartheta_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6. \quad$ e $z = 0.$

A4 $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{4}{n} - \sin\frac{4}{n}\right)^{\alpha}}{\cos\frac{3}{n}\left(\log\left(1+\frac{7}{n}\right) + \sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2}$$

Usiamo confronto asintotico: (per $n \to +\infty$)

NUMERATORE $\sim \left(\left(\frac{4}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}\right)^{\alpha}$ usando lo sviluppo del seno

DENOMINATORE:

Noto che $\cos\frac{3}{n} \longrightarrow 1$ per $n \to +\infty$

quindi non dà contributo

$$\log\left(1+\frac{7}{n}\right) = \frac{7}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sinh\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dunque DENOMINATORE $\sim \left(\frac{9}{n}\right)^2$

Quindi la serie equivalente da studiare (a meno di costanti, che non cambiano nulla)

è $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} \cdot \frac{1}{1/n^2} = \sum \frac{1}{n^{3\alpha-2}}$$

che converge $\iff 3\alpha - 2 > 1$
ovvero se $\alpha > 1$.

$\boxed{A5}$ $f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x = 7 \\ \arctan\left(\frac{x+1}{x-7}\right) & \text{se } x \neq 7 \end{cases}$

Per $x \neq 7$ la funzione è sicuramente continua e derivabile. In $x = 7$ ci sono problemi:

$$\lim_{x \to 7^-} \arctan\left(\frac{x+1}{x-7}\right) = -\pi/2$$

si noti $x-7 < 0$
siccome $x \to 7^-$
quindi $\frac{x+1}{x-7} \to -\infty$ $(x \to 7^-)$

$$\lim_{x \to 7^+} \arctan\left(\frac{x+1}{x-7}\right) = \pi/2 = f(7)$$

stavolta
$x - 7 > 0$ perché $x \to 7^+$

Dunque f ha un punto di discontinuità

di tipo salto in $x=7$.

Già che ci siamo, si vede facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-7}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-7}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

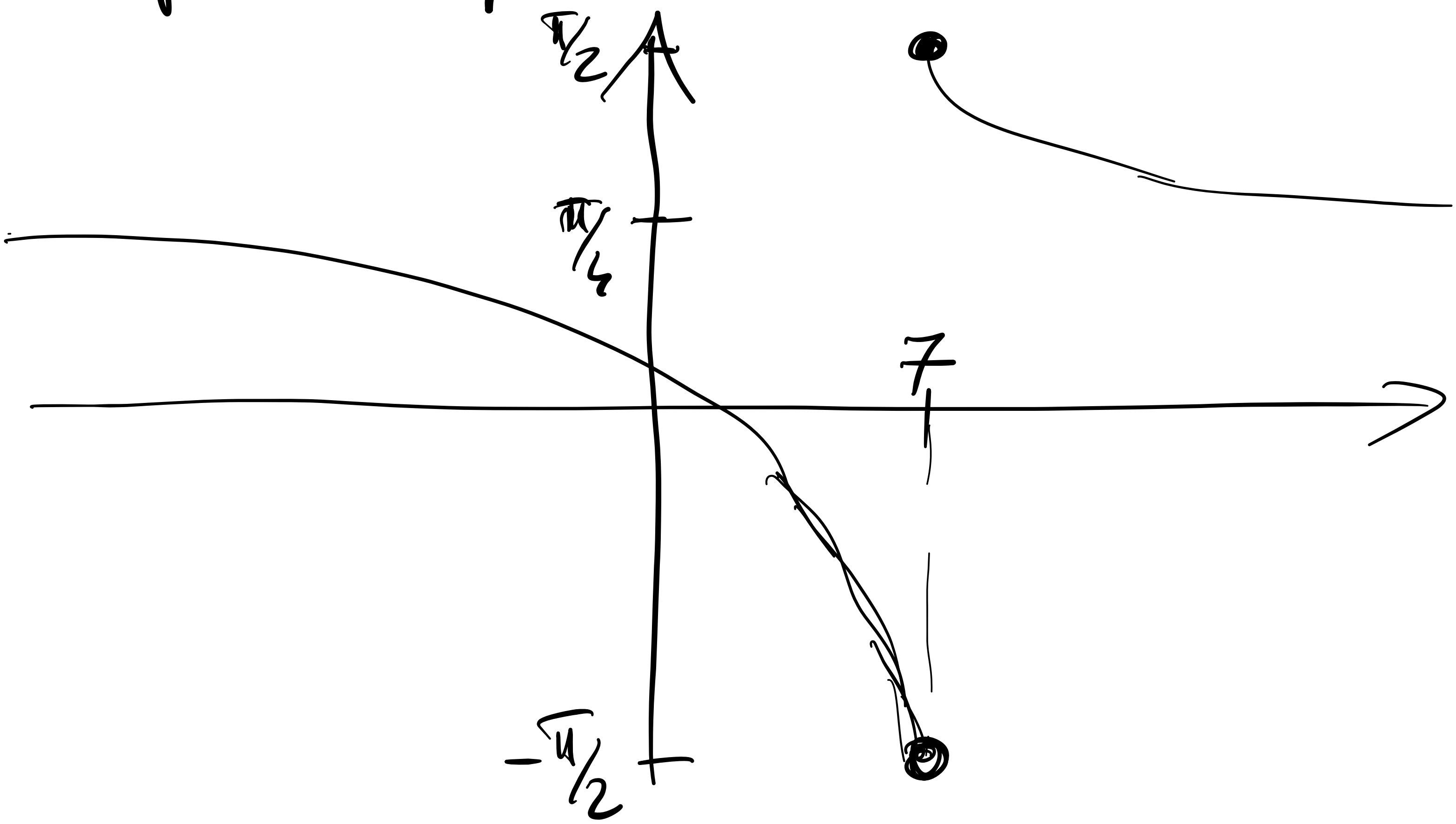
Studiamo ora la derivata dove $x \neq 7$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-7}\right)^2} \cdot \frac{x-7-(x+1)}{(x-7)^2} =$$

$$= \frac{-7-1}{(x-7)^2+(x+1)^2} = -\frac{8}{(x-7)^2+(x+1)^2}$$

$f'(x)<0 \quad \forall x \neq 7$ dunque la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty,7)$ e in $(7,+\infty)$

Dove può essere il punto di massimo? Solo in $x=7$! Guardiamo dal grafico qualitativo:



Dunque $M=\dfrac{\pi}{2}$ e $x_M=7$.

$\boxed{A6}$

$$I = \int_{x=\log 4}^{\log 7} \frac{e^{2x}}{(e^x-2)(e^x-3)}\,dx =$$

SOSTITUZIONE

$y = e^x$

$dy = e^x dx$

$x = \log 7 \to y = 7$

$x = \log 4 \to y = 4$

$$= \int_{y=4}^{7} \frac{y}{(y-2)(y-3)}\,dy$$

Strategia per integrazione funzioni razionali: cerco $A, B \in \mathbb{R}$ tc

$$\underbrace{\frac{A}{y-2} + \frac{B}{y-3}}_{\frac{Ay-3A+By-2B}{(y-2)(y-3)}} = \frac{y}{(y-2)(y-3)}$$

Dunque $\begin{cases} A+B = 1 \\ -3A-2B=0 \end{cases}$ $\quad B = 1-A$

$\to 0 = -3A - 2(1-A) = -A-2 \Rightarrow A = -2$

$B = 3$

Quindi $I = \int_{y=4}^{7} -\frac{2}{y-2} + \frac{3}{y-3} \, dy$

$= -2 \log(y-2) \Big|_4^7 + 3 \log(y-3) \Big|_4^7 =$

$= -2 \log 5 + 2 \log 2 + 3 \log 4 \cancel{-3 \underbrace{\log 1}_{=0}}$

$= -2 \log 5 + 2 \log 2 + 3 \log 4$

$\boxed{A7}$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin(2x) - \log(2+2x^2) + \log 2 - x^2}{\left(e^{x^2/2} + \cosh x - 2\right)^2}$$

Si nota subito che è forma indet. $\left[\frac{0}{0}\right]$

Usiamo gli sviluppi: per $x \to 0$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)$$

$$\log(2+2x^2) = \log(2(1+x^2)) = \log 2 + \log(1+x^2)$$

e $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

Dunque al numeratore rimane:

$$\text{NUM} = \cancel{2x^2} - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) - \cancel{\log 2}$$

$$- \left(\cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + \cancel{\log 2} \cancel{- x^2}$$

$$= -\frac{5}{6} x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

Al denominatore, ricordando che

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\text{DEN} = \left(\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + o(x^2)\right)^2 = x^4 + o(x^4)$$

per $x \to 0$

In conclusione

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{5}{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-7\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$$ è forma indeterminata del tipo $[1^{+\infty}]$.

Cerco di ricondurlo alla forma del limite notevole per la costante di Napier e

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \quad \text{se } a_n \to \begin{matrix}+\infty \\ (-\infty)\end{matrix}$$

$$\left(\frac{n+1}{n-7\sqrt{n}}\right) = \frac{n-7\sqrt{n}+7\sqrt{n}+1}{n-7\sqrt{n}} = 1+\frac{7\sqrt{n}+1}{n-7\sqrt{n}}$$

quindi $a_n = \dfrac{n-7\sqrt{n}}{7\sqrt{n}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Riscriviamo allora

$$\left(\frac{n+1}{n-7\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \left[\left(1+\frac{7\sqrt{n}+1}{n-7\sqrt{n}}\right)^{\frac{n-7\sqrt{n}}{7\sqrt{n}+1}}\right]^{\frac{7\sqrt{n}+1}{n-7\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}$$

e notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{7\sqrt{n}+1}{n-7\sqrt{n}}\right)^{\frac{n-7\sqrt{n}}{7\sqrt{n}+1}}\right] = e$$ per limite notevole

mentre $\lim_{n\to+\infty} \frac{7\sqrt{n}+1}{n-7\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = 7$

Dunque (usando la continuità dell'esponenziale)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-7\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{7}.$$

$\boxed{A8}$ $f(x) = x\cos^2(2x)$

Pol Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$P_2\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos^2(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \cos^2(2x) - 4x\cos(2x)\sin(2x)$$
$$= \cos^2(2x) - 2x\sin(4x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f''(x) = -4\cos(2x)\sin 2x - 2\sin 4x - 8x\cos 4x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cdot\frac{\pi}{2} = -4\pi$$

$$P_2\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \cancel{\frac{\pi}{2}} + x - \cancel{\frac{\pi}{2}} - 2\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= x - 2\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$\boxed{B1}$ f è limitata e integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, quindi la sua funzione integrale è ben definita e lipschitziana (quindi continua su tutto $\mathbb{R}$)

Dunque la risposta corretta è $\boxed{C}$

Che A e B siano false si vede con il controesempio $f(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D è falsa perché f potrebbe non essere continua: ad esempio se $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

$$F'_-(0) = 0 \qquad F'_+(0) = f(0) = 1$$

$\boxed{B2}$ Usando la def di equivalenza asintotica e di o piccolo, si vede che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)\, g(x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\arctan x}_{\downarrow \, \pi/2} \, \underbrace{\frac{g(x)}{e^x}}_{\downarrow \, 0} = 0$$

dunque la risposta corretta è $\boxed{D}$

Controesempio ad A, C: $g(x) \equiv 1 \ \forall x$

Controesempio a B: $g(x) = e^{-2x}$

$\boxed{B3}$ $P_2^f(x,-3) = 1 + x - x^2$
$P_2^g(x,1) = -4x + x^2$

Scriviamo $P_2^{f\circ g}(x,1) =$

$$= f(g(1)) + f'(g(1)) \cdot g'(1)\,(x-1) + \frac{\left(f''(g(1))(g'(1))^2 + f'(g(1))\,g''(1)\right)}{2}(x-1)^2$$

usando la formula della derivata della funzione composta.

Dalle ipotesi, ricordando che il Pol di Taylor (di 2° ordine) per una funzione f nel punto x_0 è l'unico polinomio P tale che
$P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, $P''(x_0) = f''(x_0)$

$\Rightarrow$ $g(1) = P_2^g(1,1) = -4 + 1 = -3$
$g'(1) = -4 + 2 = -2$
$g''(1) = 2$

$$f(-3) = P_2^f(-3,-3) = 1-3-9 = -11$$
$$f'(-3) = (P_2^f)'(-3,-3) = 1-2\cdot(-3) = 7$$
$$f''(-3) = (P_2^f)''(-3,-3) = -2$$

$$P_2^{f\circ g}(x,1) = f(-3) + f'(-3)\,g'(1)\,(x-1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f''(-3)\,(g'(1))^2 + f'(-3)\,g''(1)\right)(x-1)^2$$
$$= -11 - 14(x-1) + \frac{1}{2}\left(-8+14\right)(x-1)^2$$
$$= -11 - 14x + 14 + 3(x^2-2x+1)$$
$$= 6 - 20x + 3x^2$$

Dunque la risposta esatta è $\boxed{B}$

$\boxed{B4}$ Se f è derivabile e convessa

allora $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
$\forall x \in [a,b]$
("Il grafico della funzione "sta sopra" la retta tangente")

Dunque se $x_0 \in [a,b]$ è tale che $f'(x_0)=0$
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$
ovvero x_0 PTO DI MINIMO.
Dunque la risposta corretta è $\boxed{A}$

Controesempio a B: $f(x)=x^3 : [-1,1] \to \mathbb{R}$
$x_0 = 0$ è flesso, $f'(0)=0$ ma 0 non è pto di minimo

Controesempio a C, D $f(x)=x$ in $[1,2]$

$\boxed{B5}$ Usando la def di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \bar{n} \text{ tc } \forall n \geq \bar{n} \quad |a_n - 2| \leq \varepsilon$$

ovvero $2 - \varepsilon \leq a_n \leq 2 + \varepsilon$

Basta prendere $\varepsilon < 1$ e si ha che $\forall n \geq \bar{n} \quad a_n \geq 2 - \varepsilon > 1$

dunque la risposta corretta è $\boxed{B}$

Controesempio a A, C, D:

$$a_n = \begin{cases} -8 & \text{se } n = 1 \\ 100 & \text{se } n = 2 \\ 2 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

$\boxed{B6}$ Notiamo che

$$\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Siamo dunque di fronte ad una serie a segni alterni, essendo $\dfrac{e^{1/n}}{\sqrt{n+2}} > 0$

Usiamo il criterio di Leibniz, notando che

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}}{\sqrt{n+2}} = 0$

2) $n \longmapsto \frac{e^{1/n}}{\sqrt{n+2}}$ è decrescente

Infatti prendendo la funzione associata

$f(x) = \frac{e^{1/x}}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}\sqrt{x+2} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}e^{1/x}}{x+2}$

$x \in [1,+\infty)$ $\qquad$ < 0 sempre in $[1,+\infty)$

Quindi la serie converge almeno semplicemente.

Controlliamo che NON converge assolutamente:

$$\sum \frac{e^{1/n}}{\sqrt{n+2}} \underset{\text{confr. asintotico}}{\sim} \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

Quindi la risposta corretta è $\boxed{A}$

$\boxed{B7}$ Scriviamo formalmente cosa vuol dire che non esiste $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

$$\text{non} \left(\exists\, l \in \mathbb{R} \text{ tc } \lim_{x \to 5} f(x) = l \right)$$

ovvero

$$\text{non} \left(\exists\, l \in \mathbb{R} \text{ tc } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tc } \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 5 \quad |x-5| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right)$$

ovvero, facendo la negazione logica della proposizione:

$$\forall\, l \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tc } \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}$$
$$\text{tale che } |x-5| < 5 \text{ e } |f(x) - l| > \varepsilon$$

Dunque la risposta corretta è $\boxed{C}$

Controesempio a (A) (e a (D))

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x-5}\right) & \text{se } x \neq 5 \\ 0 & \text{se } x = 5 \end{cases}$$

Controesempio a B

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

$\boxed{B8}$ Per il teorema dei valori intermedi per funzioni continue, siccome

$$\inf_{(a,b)} f = -\infty \qquad \sup_{(a,b)} f = +\infty$$

f assume tutti i valori in $(-\infty, +\infty)$

ovvero $\forall \lambda \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ $\exists x_0 \in (a,b)$
tc $f(x_0) = \lambda$

quindi la risposta corretta è $\boxed{A}$

Controesempio al B: $f(x) = -\tan x$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Controesempio a C, D: $f(x) = -(\tan x)^3$

per $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \sim \dfrac{1}{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ sviluppo di cos per $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

$\cos x = x + \frac{\pi}{2} + o\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ per $x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$

Dunque $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)(-\tan x)^3 = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(-(\tan x)^3\right) = 0$