Soluzioni della prova del 26/01/23

Parte A

A1. Innanzitutto si nota che il denominatore è sempre positivo, e che il numeratore si annulla solo in $x_0 = 5$, che è dunque l'unico zero della funzione. Più precisamente, fè positiva in $(5, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 5)$. Si nota anche che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Visto che la funzione è derivabile, per studiare massimi e minimi si calcola la derivata $f'(x) = \frac{(x-6)^2+3-2(x-6)[(x-6)+1]}{[(x-6)^2+3]^2}$ e si deduce, studiando il segno del numeratore visto che il denominatore è sempre positivo, che

$$\begin{cases} f'(x) = 0, & \text{se } x = 3, 7, \\ f'(x) > 0, & \text{se } x \in (3, 7), \\ f'(x) < 0, & \text{se } x \in (-\infty, 3) \cup (7, +\infty). \end{cases}$$

Di conseguenza (tenendo conto dei limiti all'infinito della funzione) $x_M = 7$ è un punto di massimo assoluto e $x_m = 3$ è punto di minimo assoluto.

A2. Si nota innanzitutto che la funzione è ben definita nel suo dominio perchè il denominatore non si annulla, e che è di classe almeno C^1. Ricordando che l'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$ è data da $y = f(0) + f'(0)x$, basta calcolare $f(0) = \frac{\sin 6}{\cos 3}$ e

$$f'(x) = \frac{\cos(6+x)\cos(3-x) - \sin(6+x)\sin(3-x)}{\cos^2(3-x)}, \qquad f'(0) = \frac{\cos 6\cos 3 - \sin 6 \sin 3}{\cos^2 3} = \frac{\cos 9}{\cos^2 3}.$$

A3. Anche in questo caso si nota che la funzione è ben definita e almeno di classe C^2. Dunque basta ricordare che il polinomio di Taylor MacLaurin di secondo ordine centrato in $x = 0$ è $T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2}$, e calcolare $f(0) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x+3}\right)\frac{(-\pi)}{(x+3)^2}, \qquad f'(0) = -\frac{\pi\cos(\pi/3)}{9},$$

$$f''(x) = \frac{2\pi}{(x+3)^3}\cos\left(\frac{\pi}{x+3}\right) - \frac{\pi^2}{(x+3)^4}\sin\left(\frac{\pi}{x+3}\right), \qquad f''(0) = \frac{2\pi}{27}\cos(\pi/3) - \frac{\pi^2}{81}\sin(\pi/3).$$

A4. Il primo limite è il limite notevole legato alla costante di Napier e fa e^6. Riguardo il secondo limite è sufficiente fare gli sviluppi al prim'ordine per $x \to 1$:

$$\sin(x-1) = x-1+o(x-1), \qquad \sinh(x-1) = x-1+o(x-1), \qquad \arctan(x-1) = x-1+o(x-1),$$

e notare che $\sin^2(x-1) = o(x-1)$ per $x \to 1$. Mettendo tutto assieme si vede che il limite fa -5.

A5. Chiaramente $Re(iw) = -2$ e $Im(\overline{w}) = -2$, quindi $A = -2$. Per risolvere l'equazione usiamo la forma algebrica $z = x + iy$, quindi $|z|^2 = x^2 + y^2$, $\overline{z} = x - iy$ e otteniamo $x^2 + y^2 - x + iy = 4 - i$, da cui si deduce

$$\begin{cases} y = -1, \\ x^2 + y^2 - x = 4, \end{cases} \qquad x^2 - x - 3 = 0, \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

A6. Si nota subito che la serie si può riscrivere, moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{n+6} + \sqrt{n-6})$, come

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan(2+n^\alpha)(\sqrt{n+6}+\sqrt{n-6})}{12n^{2\alpha}}.$$

A questo punto si può usare il criterio del confronto asintotico (la serie è chiaramente a termini positivi) e notare che, per $n \to +\infty$,

$$\sqrt{n+6} + \sqrt{n-6} \sim \sqrt{2}n^{1/2},$$

$$\arctan(2+n^\alpha) \sim \begin{cases} \pi/2, & \text{se } \alpha > 0, \\ \arctan 3, & \text{se } \alpha = 0, \\ \arctan 2, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Dunque è sufficiente (tralasciando le costanti) studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha-1/2}},$$

che converge se e solo se $2\alpha - 1/2 > 1$, ovvero per $\alpha > 3/4$.

A7. Essendo un'equazione lineare del prim'ordine, moltiplichiamo entrambi i termini dell'equazione per

$$e^{\int_1^t \frac{2}{s}\,ds} = e^2 \log t = t^2,$$

ottenendo

$$\frac{d}{dt}\Big(t^2 u(t)\Big) = 3.$$

Integrando entrambi i membri fra 1 e t, otteniamo

$$u(t)t^2 = u(1) + 3(t-1),$$

ovvero (inserendo la condizione iniziale)

$$u(t) = t^{-2} + 3(t^{-1} - t^{-2}).$$

A8. La primitiva di $x\sinh(6x^2)$ è chiaramente $\frac{\cosh(6x^2)}{12}$. Bisogna invece integrare per parti

$$\int x\sin(3x)\,dx = -\frac{x\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int \cos(3x) = -\frac{x\cos(3x)}{3} + \frac{1}{9}\sin(3x).$$

Di conseguenza

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{\cosh(6\pi^2)-1}{12} + \frac{\pi}{3}.$$

Parte B

B1. $\boxed{\text{D}}$ Perchè per il teorema di Lagrange (per il quale abbiamo tutte le ipotesi necessarie), vale

$$\exists \xi \in (-1,1) \text{ tale che } f'(\xi) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{f(1)-f(-1)}{2}.$$

Usando il fatto che la funzione è dispari e quindi $f(-1) = -f(1)$ si conclude.

B2. $\boxed{\text{D}}$ Poichè in tal caso la funzione si può prolungare con continuità in 0, e il prolungamento è una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, e dunque integrabile.

B3. $\boxed{\text{B}}$ Per definizione di Polinomio di Taylor, $P_2(x,1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$. Dunque si può imporre che questo sia uguale a $x + x^2$ e ricavare $f(1), f'(1), f''(1)$ con il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{f''(1)}{2} & = 1, \qquad f''(1) = 2, \\ -f''(1) + f'(1) & = 1, \qquad f'(1) = 3, \\ f(1) - f'(1) + \frac{f''(1)}{2} & = 0, \qquad f(1) = 2. \end{cases}$$

B4. $\boxed{\text{B}}$ La condizione necessaria di convergenza della serie assicura che $\lim_{n\to+\infty} \arctan(a_n) = 0$, e poichè l'arcotangente è una funzione continua che si annulla solo in 0 questo implica che (a_n) deve essere infinitesima.

B5. $\boxed{\text{D}}$ Basta verificare, per la definizione/caratterizzazione della continuità in un punto, che

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(e^{1/x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

B6. $\boxed{\text{B}}$ Ricordiamo che l'ipotesi si può riscrivere come

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0,$$

dunque, ricordando anche la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} x^2 f(x) = 0.$$

B7. $\boxed{\text{B}}$ Perchè grazie all'ipotesi che (a_n) è a termini positivi e infinitesima, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

B8. $\boxed{\text{B}}$ Per proprietà delle funzioni monotone, che ammettono sempre limite (finito o infinito).