PARTE A

1. $$\begin{cases} u'' - 4u = t \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione omogenea associata

$$u'' - 4u = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2$$ (soluzioni reali distinte).

Abbiamo

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + u_p,$$

dove u_p è un integrale particolare dell'equazione completa. Possiamo riscrivere la soluzione in questo modo, che è più semplice per i calcoli:

$$u = C_1 \sinh 2t + C_2 \cosh 2t + u_p$$

Per quanto riguarda u_p, poiché il termine noto è un polinomio di primo grado e la variabile u appare anche con grado di derivazione zero, necessariamente deve essere u_p un polinomio di I grado:

$$u_p = At + B \implies u_p' = A, \quad u_p'' = 0.$$

Sostituendo abbiamo

$$-4At - 4B = t$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ -4B = 0 \end{cases} \implies \begin{matrix} A = -1/4 \\ B = 0 \end{matrix}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$u = C_1 \sinh 2t + C_2 \cosh 2t - \frac{1}{4}t$$

$$u' = 2C_1 \cosh 2t + 2C_2 \sinh 2t - \frac{1}{4}$$

Imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{array}{lll} u(0) = 0 & \left|\begin{array}{l} C_2 = 0 \\ 2C_1 - \frac{1}{4} = 1 \end{array}\right. & \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 = \frac{5}{8} \end{array} \\ u'(0) = 1 & & \end{array}$$

Quindi, la soluzione cercata è

$$u = \frac{5}{8} \sinh 2t - \frac{1}{4}t$$

oppure, anche

$$u = \frac{5}{16} e^{2t} - \frac{5}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4}t.$$

(2) Data $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, definita da $f(x)=6\sin x\cdot e^x$ individuare tutti i suoi punti di massimo e di minimo locali.

Calcolare massimo e minimo globali di f.

Osserviamo che

$$f(0)=0$$
$$f(2\pi)=0$$

Inoltre

$$f'(x)=6\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)$$
$$=6e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{12}{\sqrt{2}}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Quindi

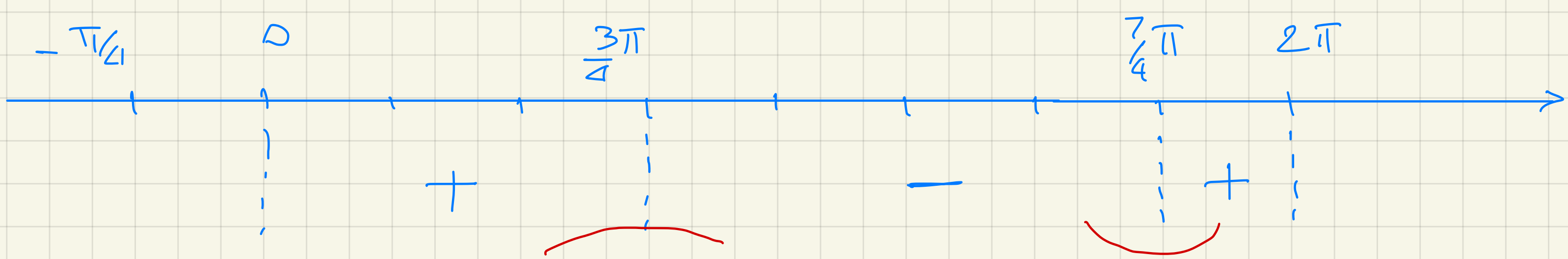
$$f'(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{12}{\sqrt{2}}\, e^x}_{>0} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$$

$$0 \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$2\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 3\pi \qquad \frac{7}{4}\pi \leq x \leq \frac{11}{4}\pi$$

Tenendo conto che f è definita in $[0, 2\pi]$, abbiamo la situazione data sotto in figura



È chiaro che

$x = \frac{3}{4}\pi$ punto di massimo locale

$x = \frac{7}{4}\pi$ punto di minimo locale

Inoltre, anche se la tangente non è orizzontale, in quanto estremi dell'intervallo di definizione, abbiamo

$x = 0$ punto di minimo locale

$x = 2\pi$ punto di massimo locale.

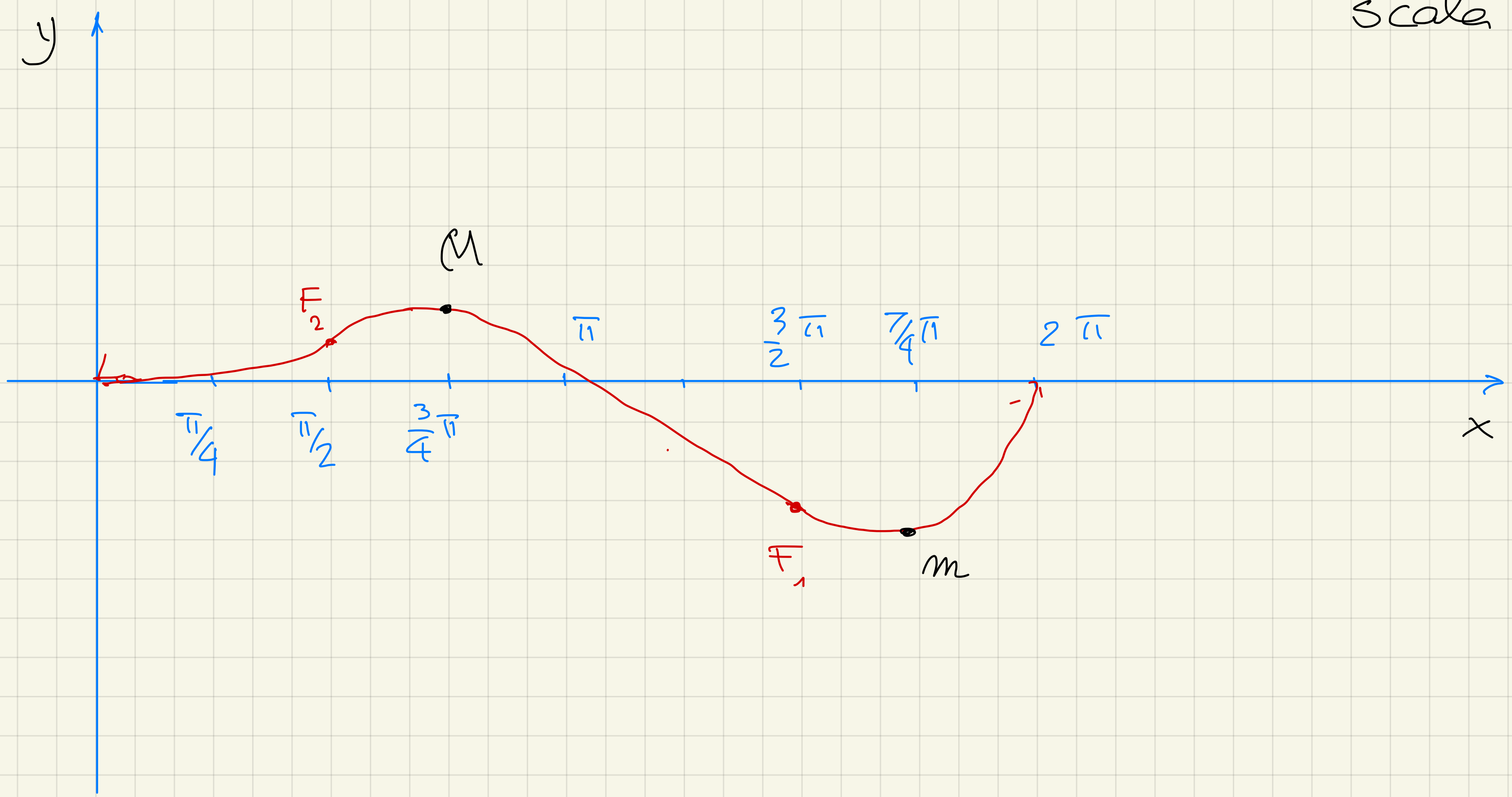
Poichè f è continua in $[0, 2\pi]$, intervallo chiuso e limitato, per il Teo di Weierstrass, il massimo e il minimo globali esistono certamente.

Abbiamo

$$M = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 6\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi} = 3\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$m = f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{7}{4}\pi} = -3\sqrt{2}\,e^{\frac{7}{4}\pi}$$

Il grafico di f è riportato sotto in figura (non in scala)



dove abbiamo tenuto conto che da

$$f'(x) = \frac{12}{\sqrt{2}} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

si ricava

$$f''(x) = \frac{12}{\sqrt{2}} e^x \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{12}{\sqrt{2}} e^x \left[\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x} \right]$$

$$= \frac{12}{\sqrt{2}} e^x \sqrt{2} \cos x = 12 e^x \cos x$$

da cui si ottiene che

$$f''(x) = 0 \qquad \cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

Quindi $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ sono punti di flesso (peraltro, non richiesti).

③ Calcolare il valore dei seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{e^n}\right)^{-e^n} = \left(\begin{matrix} e^n = x \\ n\to+\infty\ ,\quad x\to+\infty\end{matrix}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right]^{-6}$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right]^{-6} = e^{-6}$$

$$\lim_{x\to 6} \tan(x+6)\left(\frac{\cos(x-6)-1+[\ln(x-5)]^2}{\ln(x^2-12x+37)}\right)$$

$$= \left[\lim_{x\to 6}\tan(x+6)\right]\cdot\left[\lim_{x\to 6}\frac{\cos(x-6)-1+\ln^2(x-5)}{\ln(x^2-12x+37)}\right]$$

$$= \tan 12 \cdot \lim_{x\to 6} \frac{\cancel{1} - \frac{1}{2}(x-6)^2 + o(x-6)^3 \cancel{-1} + \ln^2(1+(x-6))}{\ln(x^2-12x+36+1)}$$

$$= (\tan 12) \lim_{x\to 6} \frac{-\frac{1}{2}(x-6)^2 + \left[x-6-\frac{1}{2}(x-6)^2\right]^2}{\ln(1+(x-6)^2)}$$

$$= (\tan 12) \cdot \lim_{x\to 6} \frac{-\frac{1}{2}(x-6)^2 + (x-6)^2}{(x-6)^2}$$

$$= \frac{\tan 12}{2}$$

---

④ Calcolare $I = 3\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 3\cos x}\,dx$

Osserviamo che in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ $g(x) = \cos x$

è monotona strettamente decrescente. Possiamo pertanto fare il cambiamento di variabili

$$\cos x = t \qquad -\sin x \, dx = dt$$

$$x = 0 \qquad t = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto

$$I = 3 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 3\cos x} \, dx = -3 \int_1^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{t^2+3t} \, dt$$

$$= 3 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{t(t+3)} \, dt = 3 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+3} \right) dt$$

$A(t+3) + Bt = 1$, $\quad t = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, $\quad t = -3 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

Pertanto

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \left[\ln \left| \frac{t}{t+3} \right| \right]_{\sqrt{3}/2}^{1}$$

$$= \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \ln \frac{6+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \ln 4 = \ln \frac{6+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

---

5 Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[9]{n^9 + 2n} - n \right)^{\alpha} e^{1/n^2}$$

Poniamo

$$a_n = \left(\sqrt[9]{n^9 + 2n} - n \right)^{\alpha} e^{1/n^2}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n^2} = 1$$

Quindi, il comportamento della serie è determinato da $\left(\sqrt[9]{n^9+2n} - n\right)^\alpha$

Osserviamo che

$$\sqrt[9]{n^9+2n} - n = \left[n^9\left(1+\frac{2}{n^8}\right)\right]^{1/9} - n$$

$$= n\left(1+\frac{2}{n^8}\right)^{1/9} - n = \text{(per } n \longrightarrow +\infty\text{)}$$

$$= n\left[1 + \frac{1}{9}\frac{2}{n^8} + o\left(\frac{1}{n^8}\right)\right] - n$$

$$= \frac{2}{9}\frac{1}{n^7} + o\left(\frac{1}{n^7}\right)$$

Pertanto

$$\left(\sqrt[9]{n^9+2n}-n\right)^\alpha = \frac{2}{9}\frac{1}{n^{7\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{7\alpha}}\right)$$

Affinché la serie converga, deve essere $\alpha > 0$ e tale per cui

$$7\alpha > 1 \implies \boxed{\alpha > \frac{1}{7}}$$

---

(6) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{x-3}}{\sqrt{x+3}}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(3, f(3))$

Abbiamo

$$f(3) = \frac{e^{3-3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x-3}\sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\, e^{x-3}}{x+3}$$

$$f'(3) = \frac{e^{3-3}\sqrt{6} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\, e^{3-3}}{6}$$

$$= \frac{2 \cdot 6 - 1}{12\sqrt{6}} = \frac{11}{12\sqrt{6}}$$

Pertanto,

$$r_{tg}: \quad y - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{11}{12\sqrt{6}}(x-3)$$

---

(7) Si consideri $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-(x-2)}$. Scrivere il polinomio di Taylor/McLaurin di ordine 2 della f centrato in $x_0 = 2$.

Abbiamo

$$f(x) = \sqrt{x}\, e^{-(x-2)} \qquad f(2) = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-(x-2)} - \sqrt{x}\, e^{-(x-2)}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} e^{-(x-2)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-(x-2)}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-(x-2)} + \sqrt{x}\, e^{-(x-2)}$$

$$= e^{-(x-2)} \left[\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} \right]$$

$$f''(2) = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 - 1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

Quindi

$$P_2(x;2) = \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}(x-2) + \frac{7}{16\sqrt{2}}(x-2)^2$$

---

(8) Calcolare il modulo del numero complesso

$$\frac{(2-2i)^{14}}{(1+i)^{12}}$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z|z|^2 - i\bar{z} = 0$ e scrivere le soluzioni in forma algebrica.

Si tratta di due parti distinte.

Posto $\quad w = \dfrac{(2-2i)^{14}}{(1+i)^{12}}$, abbiamo

$$|w| = \frac{|[2(1-i)]^{14}|}{|(1+i)^{12}|} = \frac{2^{14}\,|1-i|^{14}}{|1+i|^{12}}$$

Poichè

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = 2^{1/2}$$

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = 2^{1/2}$$

otteniamo

$$|w| = \frac{2^{14}\left(2^{1/2}\right)^{14}}{\left(2^{1/2}\right)^{12}} = \frac{2^{14}\, 2^{7}}{2^{6}} = 2^{15}$$

Passando alla seconda parte, se poniamo

$$z = x+iy, \qquad |z|^2 = x^2+y^2, \qquad \bar{z} = x-iy$$

abbiamo

$$(x+iy)(x^2+y^2) - i(x-iy) = 0$$

$$x(x^2+y^2) + iy(x^2+y^2) - ix - y = 0$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x\,(x^2+y^2) - y = 0 \\ y\,(x^2+y^2) - x = 0 \end{cases}$$

È immediato osservare che $x = y = 0$ è soluzione, da cui otteniamo $\boxed{z_0 = 0.}$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, abbiamo

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{y}{x} \\ x^2+y^2 = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{y}{x} \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

Da $x^2 = y^2$ ricaviamo $x = \pm y$. Tuttavia, da

$$x^2+y^2 = \frac{y}{x}$$

osserviamo che x e y devono avere lo stesso segno, altrimenti $x^2+y^2>0$ e $\frac{y}{x}<0$.
Pertanto abbiamo solo $x=y$, da cui otteniamo

$$2x^2 = 1 \qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \qquad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

PARTE B

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 2$

Quindi

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

per il Teorema Fondamentale del Calcolo è di classe C^1 in tutto $\mathbb{R}$ e $F(0) = 0$.

Abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Applicando la Regola di De l'Hopital, osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

Pertanto, possiamo concludere che

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to 0} f(x) = 2,$$

cioè la risposta $\boxed{D}$.

---

② Sia (a_n) una successione a valori reali t.c. $\sum_{n=8}^{\infty} a_n$ è convergente.

Per la condizione necessaria di convergenza, deve essere

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Pertanto

$$\lim_{n \to \infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n \to \infty} a_n} = e^0 = 1$$

e la risposta corretta è $\boxed{C}$.

---

③ Sia f di classe $C^5(\mathbb{R})$ e sia $P_4(x;1) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$ il suo polinomio di Taylor/McLaurin di grado 4 centrato in $x_0 = 1$.

Per le proprietà del polinomio di Taylor/Mc Laurin, abbiamo che

$$\forall\, k = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad P_4^{(k)}(1) = f^{(k)}(1)$$

Pertanto

$$k = 0 \qquad P_4(1) = 4 \implies f(1) = 4$$

$$k = 1 \qquad P_4' = 2x + 3x^2 + 4x^3 \qquad P_4'(1) = 9 \implies f'(1) = 9$$

$k=2 \quad P_4''(x) = 2+6x+12x^2, \quad P_4''(1) = 20 \Longrightarrow f''(1)=20$

$k=3 \quad P_4'''(x) = 6+24x, \quad P_4'''(1) = 30 \Longrightarrow f'''(1)=30$

$k=4 \quad P_4^{(4)}(x) = 24, \quad P_4^{(4)}(1) = 24 \Longrightarrow f^{(4)}(1) = 24$

Poiché f è di classe $C^5(\mathbb{R})$ e $f'(1) = 9 > 0$, concludiamo che f è crescente in un intorno di $x_0 = 1$, ossia $\boxed{B}$.

---

④ Sia $f : [8, 12] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 in $[8, 12]$.

Quindi f' è una funzione di classe C^1 (e in particolare, continua) in $[8, 12]$. Possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e concludere che f' ha massimo e minimo in $[8, 12]$; la risposta corretta è pertanto $\boxed{D}$.

---

(5) Si consideri $f(x) = 1 - e^{x^2}$. Abbiamo

$$f(x) = 1 - e^{x^2} = 1 - \left[1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots\right]$$

$$= -x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} (-x + o(x))$$

$$= 0$$

Poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

concludiamo che

$$f(x) = o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

cioè la risposta $\boxed{B}$.

---

(6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni crescenti e tali che $g(0) = 1$ e $f(x) > g(x)$ per x abbastanza grande.

Poiché $g(0) = 1$ e g è crescente, abbiamo

$$g(x) \geq 1 \qquad \forall x \geq 0$$

Inoltre, esiste $M > 0$ t.c.

$$\forall x \geq M \quad f(x) > g(x) \geq 1$$

Equivalentemente, possiamo riscrivere

$\forall x \geq M$ risulta $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$

oppure anche

$\forall x \geq M$ risulta $\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 > 0$

Se consideriamo

$$f(x) = 2 + x^3$$

$$g(x) = 1 + x^3$$

le due funzioni soddisfano tutte le ipotesi (addirittura $f(x) > g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$) e tuttavia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Quindi $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ e $\boxed{D}$ sono false. L'unica risposta corretta è $\boxed{C}$.

---

⑦ Sia $\{a_n\}$ con $n \geq 1$ definita da

$$a_{n+1} = e^{a_n} - 1$$

$$a_1 = 1$$

Poiché

$$e^t \geq 1 + t \implies e^t - 1 \geq t$$

concludiamo che

$$e^{a_n} - 1 \geq a_n$$

cioè

$$a_{n+1} \geq a_n,$$

ossia la successione è monotona crescente; la risposta corretta è $\boxed{C}$.

---

(8) Si considerino $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$ risulti $|f(x)| \leq 4$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in tutto $\mathbb{R}$.

Se $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$, per la continuità di g avremo $g(1) = 0$. Inoltre

$$\left|\lim_{x\to 1} f(x)g(x)\right| = \lim_{x\to 1}|f(x)|\cdot|g(x)|$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}} |f(x)| \lim_{x\to 1} |g(x)|$$

$$= 4\cdot 0 = 0 = |f(1)\cdot g(1)|$$

Quindi $f\cdot g$ è continua in $x=1$ e la risposta corretta è $\boxed{D}$.