Soluzioni della prova del 27/01/22

Parte A

A1. Si vede facilmente che $z_0 = 2e^{i(\frac{7}{6}\pi)}$. Inoltre, siccome $z\overline{z} = |z|^2 \in [0, +\infty)$, basta trovare le soluzioni di $z^3 = z_0$. Ovvero basta trovare le radici terze di z_0, che risultano essere

$$z_k = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

A2. Con il procedimento standard si trova che

$$u(t) = -e^{-t} + (1+t)e^{6t}$$

A3. Chiamando $g(x) = x^2$ e $h(x) = \cos\left(\frac{x-2}{x^2}\right)$, con gli sviluppi di Taylor con resto di Peano si osserva che, per $x \to 2$,

$$g(x) = 4 + 4(x-2) + (x-2)^2 + o((x-2)^2), \qquad h(x) = 1 - \frac{1}{32}(x-2)^2 + o((x-2)^2).$$

Osservando che $f(x) = g(x)h(x)$ si trova che

$$P_2(x; 2) = 4 + 4(x-2) + \frac{7}{8}(x-2)^2.$$

A4. Sapendo che $\arctan(z) \sim z$ per $z \to 0$ il denominatore è asintotico a $\frac{4x^2}{24}$. Per il numeratore si ha invece, per $x \to 0$,

$$\cos(-2x) = \cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^5), \qquad \ln(1-4x^2) = -4x^2 - \frac{1}{2}(4x^2)^2 + o(x^4).$$

Si noti che è necessario espandere il numeratore fino a x^4. A questo punto basta un semplice conto per vedere che il limite risulta uguale a -28.

A5. Innanzitutto notiamo che f è derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque f è strettamente crescente e invertibile. Si vede facilmente che l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ è data da $x_0 = 0$, dunque $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$, mentre usiamo la formula della derivata della funzione inversa per ottenere

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{f'(0)} = \tfrac{1}{7}.$$

A6. Ricordando la definizione di coseno iperbolico, si osserva che il denominatore è asintotico a $\frac{1}{2}e^{7k}$ per $k \to +\infty$. Il numeratore è invece asinotico a $\frac{2}{k^2}b^k$ per $k \to +\infty$. Studiamo allora la convergenza della serie con termine generale

$$\tfrac{4}{k^2}\left(\tfrac{b}{e^7}\right)^k.$$

Chiaramente converge se $b < e^7$, visto che domina il termine esponenziale e diverge per $b > e^7$. Nel caso $b = e^7$ resta solo il termine $\frac{4}{k^2}$, e anche in questo caso la serie è convergente. Grazie al criterio del confronto asintotico per serie a temini positivi abbiamo concluso.

A7. Calcolando la derivata $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$, si trova l'unico punto di minimo $x_m = 1$, dunque $m = f(x_m) = -1 + \ln 2$.

A8. Studiamo per prima cosa la convergenza in 0 (si noti che il denominatore si annulla solo in questo punto): il numeratore, per $x \to 0$, è asintotico ad un numero positivo, mentre il denominatore è asintotico (a meno di una costante) a $x^{3\alpha}$, dunque l'integrale è convergente se $\alpha < \frac{1}{3}$. Riguardo la convergenza in 9, notiamo che il denominatore per $x \to 9$ è asintotico ad una costante, mentre il numeratore è asintotico a $(9 - x)^{2\alpha+1}$, e dunque abbiamo convergenza per $-(2\alpha + 1) < 1$ ovvero $\alpha > -1$.

Parte B

B1. $\boxed{\text{D}}$ Per definizione di derivata in un punto come limite del rapporto incrementale. (E' interessante provare a costruire un controesempio alle opzioni A e B partendo dalla funzione di Dirichlet).

B2. $\boxed{\text{A}}$ Per condizione necessaria per la convergenza di una serie.

B3. $\boxed{\text{C}}$ per disuguaglianza triangolare

B4. $\boxed{\text{B}}$ Se f è continua in 0, allora l'ipotesi e la definizione di equivalenza asintotica implicano che $f(0) = 0$. A questo punto basta utilizzare la definizione di derivata in 0 e ancora l'ipotesi.

B5. $\boxed{\text{B}}$ Poichè $F'(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2 \, dt + x \sin x^2$ si ha $xF'(x) = F(x) + x^2 \sin x^2$.

B6. $\boxed{\text{C}}$ Perchè $f(x) = P_2(x, x_o) + o((x - x_o)^2)$ per $x \to x_o$, dalla formula di Taylor con resto di Peano.

B7. $\boxed{\text{B}}$ Per definizione di estremo inferiore (si noti che l'ipotesi di continuità è sovrabbondante).

B8. $\boxed{\text{D}}$ Per definizione di estremo superiore. Si noti che la B è falsa, perchè il limite potrebbe non esistere, ad esempio prendendo $a_n = (-1)^n n^2$.