SCRITTO ANALISI 1 29/2/24

$\boxed{A1}$ $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)\left[\tanh\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^{2\alpha}}{(\cos(n)-4)\left[\log(2^n+1)\right]^{2\alpha}}$$

Notiamo subito che $-5 \leq \cos(n)-4 \leq -3$ quindi (per confronto) non influisce sulla conv. della serie.

$\lim_{n\to+\infty} \arctan n = \pi/2$ quindi anche il termine $\arctan n$ non conta nella convergenza.

Per confronto asintotico studiamo:

$$\left[\tanh\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^{2\alpha} \sim \left(\frac{1}{2n}\right)^{2\alpha} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$\left[\log(2^n+1)\right]^{2\alpha} = \left[\log(2^n)+\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]^{2\alpha} =$$

$$= \left[n\log 2 + o_n(1)\right]^{2\alpha} \sim (\log 2)^{2\alpha} n^{2\alpha}$$

Dunque basta studiare la convergenza di

$$\underbrace{\frac{1}{2^{2\alpha}(\log 2)^{2\alpha}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}\cdot n^{2\alpha}}}_{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{4\alpha}}} < +\infty \iff 4\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{4}$$

$\boxed{A2}$ Calcolare $P_4(x,0)$ per $f(x) = \left(e^{7x^2}+3\right)\cos x$

Sviluppiamo per $x\to 0$ i due fattori

$$e^{7x^2}+3 = 3+1+7x^2+\frac{(7x^2)^2}{2}+o(x^4) \qquad \text{per } x\to 0$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\left(e^{7x^2}+3\right)\cos x = \left(4+7x^2+\frac{49}{2}x^4+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$$= 4-\frac{\cancel{4}x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+7x^2-\frac{7}{2}x^4+\frac{49}{2}x^4+o(x^4)$$

Dunque $P_4(x,0) = 4 + 5x^2 + \left(\frac{1}{6} + 21\right)x^4$

$\boxed{A3}$ $I = \int_7^{+\infty} e^{-2x}(x-7)\,dx$ <u>PER PARTI</u>

$F(x) = x-7 \quad F'(x) = 1$

$G(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} \quad G'(x) = e^{-2x}$

$$= -\frac{(x-7)}{2} \cdot e^{-2x} \Big|_7^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_7^{+\infty} e^{-2x}\,dx$$

$$= 0 + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-7)}{2} e^{-2x}}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \frac{1}{4} e^{-2x}\Big|_7^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} + \frac{e^{-14}}{4} = \frac{e^{-14}}{4}$$

$\boxed{A4}$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\sinh(\log x) + 2x}{(x\log x)\left(e^{\frac{7}{\log x}} - 1\right)} = L$

$$2\sinh(\log x) = \cancel{2} \cdot \frac{e^{\log x} - e^{-\log x}}{\cancel{2}} = x - \frac{1}{x}$$

NUMERATORE $= 3x - \frac{1}{x}$

$$e^{\frac{7}{\log x}} - 1 = \frac{7}{\log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad \text{per } x\to+\infty$$

DENOMINATORE $\sim x\cancel{\log x} \cdot \frac{7}{\cancel{\log x}} = 7x \quad$ per $x\to+\infty$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - \frac{1}{x}}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} \left[ \frac{2\sin n + 7\cos n}{\cosh n} + n\left(\tan\frac{2}{n} + \arctan\frac{2}{n}\right)\right]$$

Notiamo che $\cosh n \to +\infty$ per $n \to +\infty$

mentre $|2\sin n + 7\cos n| \leq 9$

quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sin n + 7\cos n}{\cosh n} = 0$

D'altra parte, $\tan\frac{2}{n} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$

$\arctan\frac{2}{n} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Quindi $L_2 = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 4$

$\boxed{A5}$ $z^2 = 36i = 36\, e^{i\pi/2}$ $\quad z = \rho e^{i\vartheta} \quad z^2 = \rho^2 e^{2\vartheta i}$

$\rho^2 = 36 \quad 2\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\rho = 6 \quad \vartheta_{0,1} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k = 0,1 \Rightarrow z_0 = 6e^{i\frac{\pi}{4}} = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z_1 = 6e^{i\frac{5\pi}{4}} = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z^2 + 12z + 36 - i = 0$ :

$z_{2,3} = -6 \pm \sqrt{36 - 36 + i} = -6 \pm \sqrt{i}$ e, come

fatto nella prima parte di esercizio, $\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

quindi $z_{2,3} = -6 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

**A6** $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=6e^{x}+6\tanh(x)+\log(1+x)$

$f^{-1}(6)$ : cerco $x_0$ tc $f(x_0)=6 \Rightarrow$

$$6e^{x_0}+6\tanh(x_0)+\log(1+x_0)=6$$

Vedo che $x_0=0$ va bene. $\quad f^{-1}(6)=0$

Notiamo che $f'(x)=6e^{x}+\dfrac{6}{\cosh^2 x}+\dfrac{1}{1+x}>0 \quad \forall x\in(-1,+\infty)$

dunque $f$ strett. crescente $\Rightarrow$ invertibile (quindi $f^{-1}$ ben definita)

$$(f^{-1})'(6)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{6+6+1}=\frac{1}{13}$$

$\boxed{\text{A7}}$ $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=e^{-2x}(x^2-36)$

Notiamo che $f$ è continua e derivabile nel dominio.

Studiamo $f'(x)=\underbrace{e^{-2x}}_{>0}\left(2x-2(x^2-36)\right)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2x-2x^2+72\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-2x-72\leq 0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+144}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{145}}{2}$$

$f'(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq x\leq \dfrac{1+\sqrt{145}}{2}$

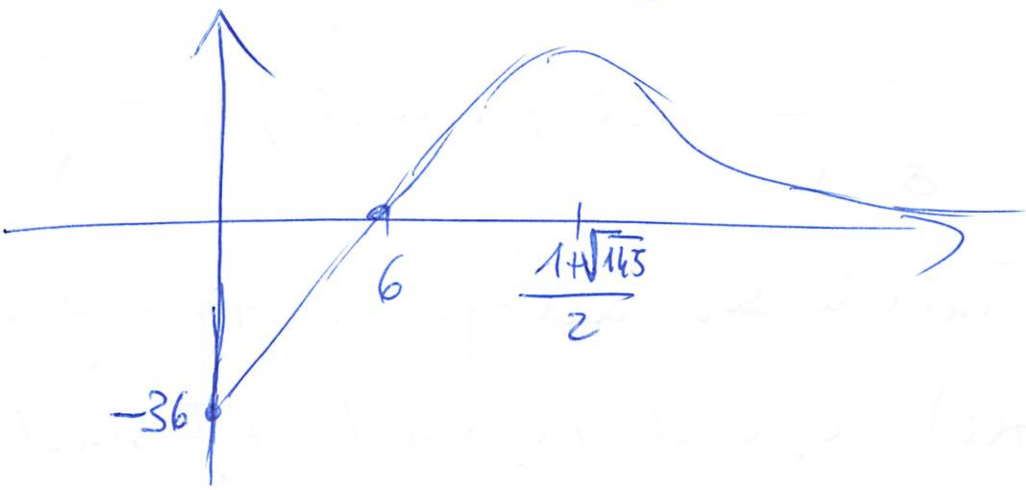
quindi $f$ cresce in $\left[0,\dfrac{1+\sqrt{143}}{2}\right]$

$f$ decresce in $\left(\dfrac{1+\sqrt{145}}{2},+\infty\right)$

Notiamo che $f(0)=-36<0$

e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Dunque $x_m = 0$ $\qquad x_M = \frac{1+\sqrt{145}}{2}$




$\boxed{A8}$ $\qquad y''+4y=0$

Eq. caratt. $\qquad \lambda^2+4=0 \qquad \lambda=\pm 2i$

$y_0(t)= c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t$.

Sol particolare di $y''(t)+4y(t)=\frac{1}{2}\cos(2t)$.

$\cos 2t = Re\left(e^{2ti}\right)$

Metodo somiglianza per $y''+4y=\frac{1}{2} e^{2ti}$

$\tilde{y}_p(t)=Ate^{2ti}$ (2i soluzione dell'eq. caratteristica!)

$\tilde{y}_p'(t)=e^{2ti}\left(A+At(2i)\right) \qquad \tilde{y}_p''(t)=e^{2ti}\left(A2i-4At+A2i\right)$

Imponiamo $\tilde{y}_p$ soluzione e troviamo A:

$$\cancel{e^{2ti}}\left(4Ai - \cancel{4At}\right) + \cancel{4e^{2ti}At} = \frac{1}{2} \cancel{e^{2ti}}$$

$4Ai=\frac{1}{2} \qquad A=\frac{1}{8i}=-\frac{i}{8}$

$\tilde{y}_p(t) = -\frac{i}{8}te^{2ti}$

$$y_P(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{y}_P(t)\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{t}{8}\left[i\left(\cos 2t + i \sin(2t)\right)\right]\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(-\frac{t}{8}\left(-\sin 2t + i\cos 2t\right)\right) = \frac{t}{8}\sin 2t$$

Tutte le sol dell'eq. $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2t)$ sono

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{t}{8}\sin 2t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

$\boxed{B1}$ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \arctan(f(x))$

Poiché $f$ e $\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sono continue allora $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua perché composizione di funzioni continue.

Per teo Weierstraß, dunque $g$ ha massimo e minimo (assoluti) in $[a,b]$ chiuso e limitato.

Quindi $\boxed{B}$ è la risposta esatta.

$\boxed{B2}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ vuol dire

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tc $\forall n \geq N \ -\varepsilon < a_n < \varepsilon$.

Scegliendo $\varepsilon = 1$, si vede che la risposta esatta è $\boxed{B}$

Controes. a C: $a_n = -\frac{1}{n}$, Controes a D: $a_n = \frac{1}{n}$

E chiaramente $\lim_{n \to +\infty} \cos(a_n) = \cos 0 = 1$.

$\boxed{B3}$ $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$

$f(z) \sim \arctan z$ per $z \to +\infty$

Dunque $f\left(\frac{1}{x}\right) \sim \arctan \frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ $\left(\frac{1}{x} \to +\infty\right)$

Allora $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{g(x)}{x}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\arctan \frac{1}{x}}_{\downarrow\, \pi/2} = 0$

quindi la risposta corretta è $\boxed{C}$

$\boxed{B4}$ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e $g(0) = 1$, ovvero $\lim_{y \to 0} g(y) = 1$

Se $f(5) = 0$, ovvero $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$

allora per limite di funzioni composte continue

$\lim_{x \to 5} g(f(x)) = \lim_{y \to 0} g(y) = 1$.

Quindi la risposta corretta è $\boxed{B}$

Controesempio ad A: $g(y) \equiv 1$ $f(x) \equiv 100$.

$\boxed{B5}$ $f \in C^1(\mathbb{R})$ $|f'(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 < x_2$ $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ soddisfa ipotesi teorema di Lagrange $\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$

Passando ai moduli e usando l'ipotesi:

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} \leq |f'(c)| \leq 1 \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$$

Dunque la risposta esatta è $\boxed{D}$

Controesempio per A, B, C: $f(x) \equiv 100$

$\boxed{B6}$ $F(x) = \int_0^x \arctan t \, dt$

$F'(x) = \arctan x$ $\quad F''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

dunque (grazie al teorema fond. calcolo integrale e proprietà funzione integrale)

la risposta esatta è $\boxed{C}$

$\boxed{B7}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos(\pi n)}{n^{1/3}} \sin\frac{1}{n}.$

Notiamo che $1 \leq 2+\cos(\pi n) \leq 3$ quindi non influisce sulla convergenza (e la serie è a termini positivi)

$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$ dunque per confronto asintotico

basta studiare $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3} \cdot n} = \sum \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty$

$\left(\frac{4}{3} > 1\right)$

Dunque la risposta corretta è $\boxed{B}$

$\boxed{B8}$ $f \in C^3(\mathbb{R})$ $\quad P_3(x) = x + 4x^3$

(Dunque $f(x) = x + 4x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$).

Ricordando che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$, vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 4x^3 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{25}{6}\frac{x^3}{x^3} = \frac{25}{6}.$$

Dunque la risposta è

$\boxed{A}$