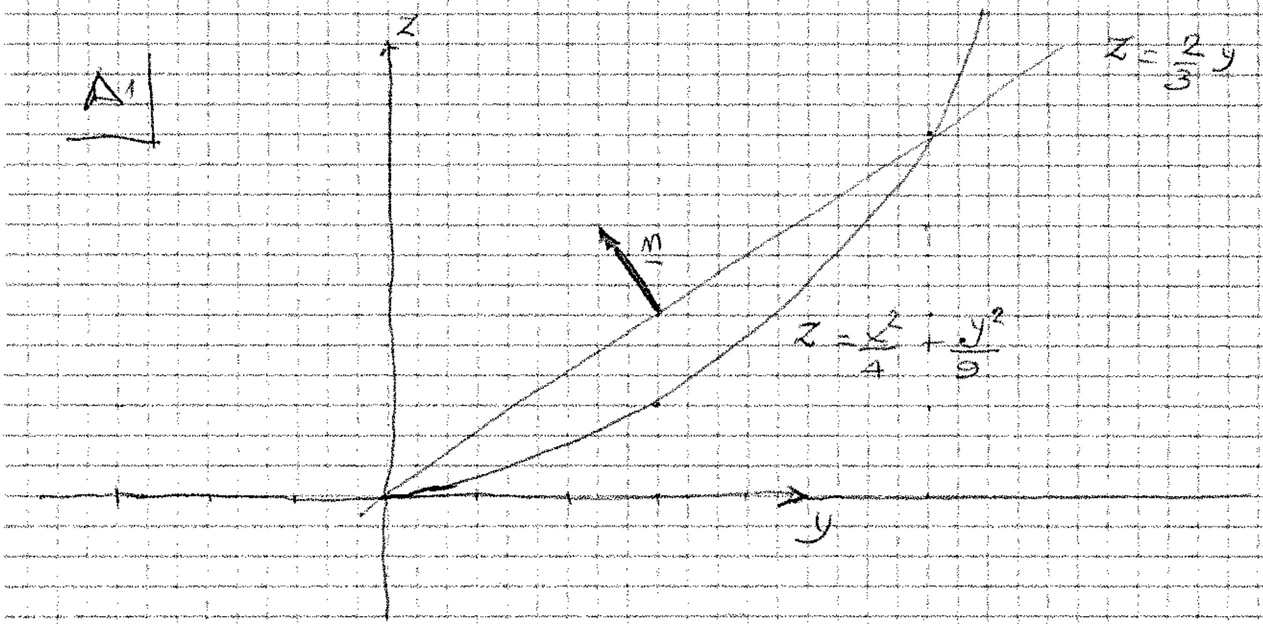
$\boxed{A^1}$



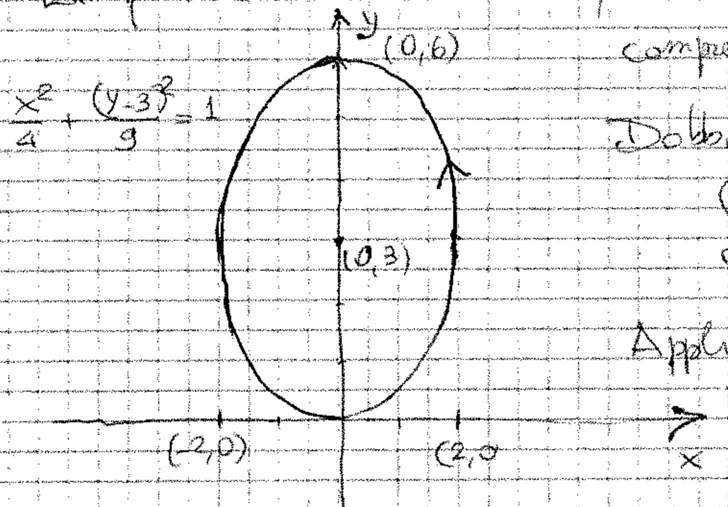
La curva Γ è determinata dall'intersezione di $z = \frac{2}{3}y$ con $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Osserviamo che

$$\begin{cases} z = \frac{2}{3}y \\ z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{3}y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{2}{3}y + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{2}{3}y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3 + 3\sin t \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z = 2 + 2\sin t \end{cases}$$

La proiezione di Γ sul piano xy è data sotto in figura, comprensiva dell'orientamento



Dobbiamo, dunque, calcolare

$$\int_\Gamma x^2 dx + (x^2 - x) dy + (4y + z) dz$$

Applichiamo il Teorema di Stokes e concludiamo che possiamo calcolare al suo posto

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \underline{F}, \underline{n} \rangle \, d\sigma_2 \qquad \text{dove}$$

$$\Sigma : \begin{cases} z = \frac{2}{3} y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1 \end{cases} \qquad n = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(0, -\frac{2}{3}, 1\right)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

$$d\sigma_2 = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & x^2 - x & 4y + z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(4 - 0) + \vec{j}\,(0 - 0) + \vec{k}\,(2x - 1 - 0)$$

$$= (4, 0, 2x - 1)$$

Pertanto, posto $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1 \right\}$

abbiamo

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \underline{F}, n \rangle \, d\sigma_2 = \int_E \left\langle (4, 0, 2x-1), \left(0, -\frac{2}{3}, 1\right) \right\rangle dx\, dy$$

$$= \int_E (2x - 1)\, dx\, dy = -\int_E dx\, dy$$

poiché $g = 2x$ è dispari in x e il dominio è simmetrico rispetto a $x = 0$. Poiché l'area dell'ellisse di semiassi a e b è $\pi a b$, otteniamo

$$-\int_E dx\, dy = -m(E) = -\pi \cdot 2 \cdot 3 = -6\pi.$$

A2

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{(x-3)^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$a_n = (-)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \Big/ \frac{1}{(2n)!} = 0$$

Pertanto $R = \infty$

Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^{2n+1}}{(2n)!} = -(x-3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= -(x-3)\cos(x-3)$$

Si noti che è una funzione dispari in $(x-3)$. Pertanto tutte le derivate pari in $x=3$ sono nulle e risulta

$$f^{(10)}(3) = 0$$

A3
$$\begin{cases} x = (4+\cos\theta)\cos\varphi & \theta \in [0, \pi/4] \\ y = (4+\cos\theta)\sin\varphi & \varphi \in [0, \pi/3] \\ z = \sin\theta \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare $|r_\theta \wedge r_\varphi|$

$$r_\theta \wedge r_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -(4+\cos\theta)\sin\varphi & (4+\cos\theta)\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(-(4+\cos\theta)\cos\theta\cos\varphi\right) +$$
$$+ \vec{j}\left(-(4+\cos\theta)\cos\theta\sin\varphi\right) + \vec{k}\left(-\sin\theta(4+\cos\theta)\right)$$

Quindi

$$|r_\theta \wedge r_\varphi| = \Big[(4+\cos\theta)^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + (4+\cos\theta)^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + $$
$$+ \sin^2\theta(4+\cos\theta)^2\Big]^{1/2}$$

$$= \left((4+\cos\theta)^2\cos^2\theta + (4+\cos\theta)^2\sin^2\theta\right)^{1/2}$$

$$= 4+\cos\theta$$

Dunque

$$\sigma_2(\Sigma) = \int_0^{\pi/4}(4+\cos\theta)\,d\theta\int_0^{\pi/3}d\varphi$$

$$= \left(4\theta + \sin\theta\right)_0^{\pi/4}\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(4\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\pi + 2\sqrt{2}\right)$$

A4) $f = x^2 + 3y + \ln(1+xy)$

CN $\nabla f = 0$ $\quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{1+xy} = 0 \\ 3 + \dfrac{x}{1+xy} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 2x^2y + y = 0 \\ 3 + 3xy + x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{2x}{1+2x^2} \\ 3 + \dfrac{(-2x)(3x)}{1+2x^2} + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2x}{1+2x^2} \\ 3 + 6x^2 - 6x^2 + x + 2x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{2x}{1+2x^2} \\ 2x^3 + x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2/3 \end{cases} \qquad P\left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_{xx} = 2 - \frac{y^2}{(1+xy)^2} \qquad f_{yy} = -\frac{x^2}{(1+xy)^2} \qquad f_{xy} = \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2}$$

$$f_{xx} = 2 - \frac{y^2}{(1+xy)^2}$$

$$f_{yy} = - \frac{x^2}{(1+xy)^2}$$

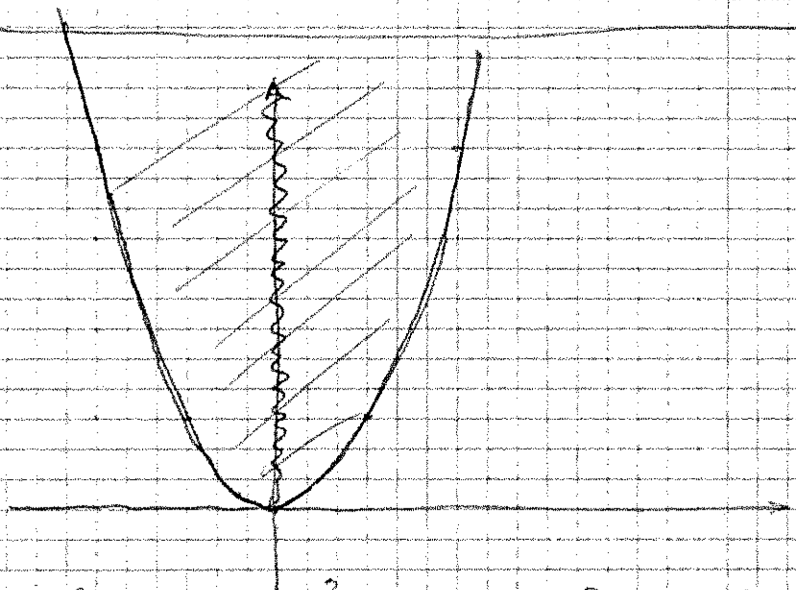
$$f_{xy} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$$H_f\left(-1, \tfrac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{4/9}{1/9} & \frac{1}{1/9} \\ \frac{1}{1/9} & -\frac{1}{1/9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Poiché H_f è ~~indeterminata~~ indefinita, il punto P è di colle

---

B2



$$\operatorname{int}\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ y \geq 0\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ y \geq 0\}$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

B3 $\quad f = \sqrt[5]{x^3 \sin^2 y}$

È facile verificare che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

Se f fosse differenziabile in $(0,0)$ dovremmo avere che

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Abbiamo

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\sqrt[5]{h^3 \sin^2 k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$$

Dunque f non è differenziabile in $O(0,0)$.

B4) $$\frac{d}{dt} f(g(t), t, g(t)) = f_x(g(t), t, g(t))\, g'(t) + f_y(g(t), t, g(t)) + f_z(g(t), t, g(t))\, g'(t)$$