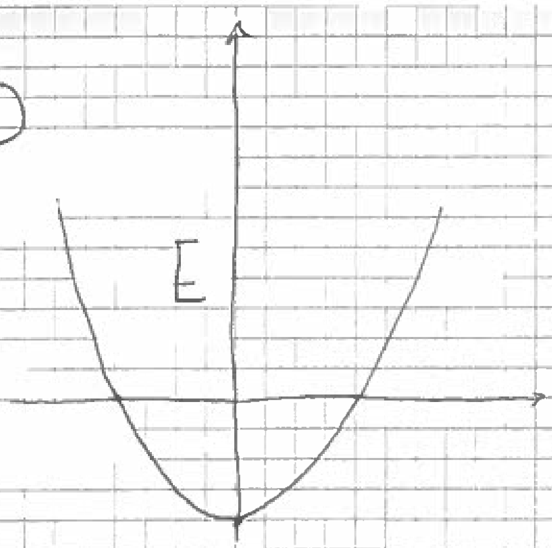
①



Osserviamo che E è semplicemente connesso e F è di classe C^∞ in E.

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = +\frac{2x}{(1-x^2+y)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = +\frac{2x}{(1-x^2+y)^2}$$

Quindi il campo F è conservativo in E. Calcoliamo il potenziale. Sarà

$$U(x,y) = \int_0^x \left(-\frac{2t}{1-t^2} + t\right) dt + \int_0^y \frac{1}{1-x^2+t}\, dt$$

$$= \left[\ln(1-t^2) + \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[\ln(1-x^2+t)\right]_0^y$$

$$= \cancel{\ln(1-x^2)} + \frac{x^2}{2} + \ln(1-x^2+y) - \cancel{\ln(1-x^2)}$$

$$= \ln(1-x^2+y) + \frac{x^2}{2}$$

Infine

$$L = U(2,5) - U(0,0) = \ln(1-4+5) + \frac{4}{2}$$

$$= \ln 2 + 2$$

---

② f è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$. Possiamo, dunque, applicare le CN e CS

<u>CN</u> $\nabla f = 0$ $\quad \begin{cases} 2(x-1)(-2x^2+x+1+y^2) = 0 \\ 2y(x-1)^2 = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono

$P(1, h) \quad \forall h \in \mathbb{R}$

$Q\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

CS $\quad f_{xx} = 2(-2x^2+x+1+y^2) + 2(x-1)(-4x+1)$

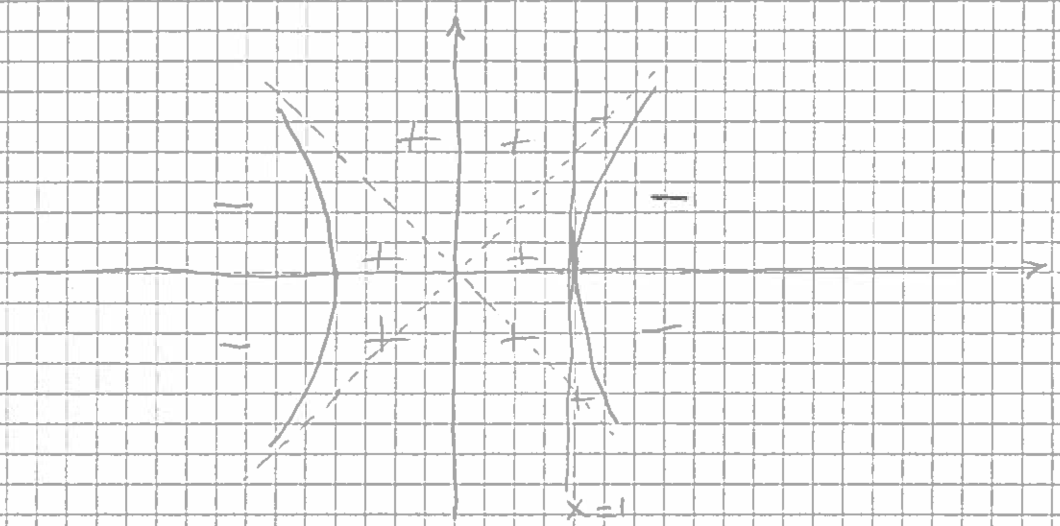
$f_{xy} = 4y(x-1)$

$f_{yy} = 2(x-1)^2$

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 9/2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$ Q è un punto di sella

$$H_f(1, h) = \begin{bmatrix} 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ La CS non si può applicare

Osserviamo che $f(1,h) = 0$. Quanto al segno di f, abbiamo la situazione in figura



Dal disegno è chiaro che $P(1,h)$ $\forall h \neq 0$ è un punto di minimo, mentre $P_0(1,0)$ è un punto di sella

③ Poniamo $x^2/4 = t$: otteniamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$

E' immediato verificare che la serie converge per $-1 \leq t < 1$
Pertanto

$$1 \leq \frac{x^2}{4} < 1 \Longrightarrow -2 < x < 2$$

Quindi

$$S = (-2, 2)$$

Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t)$$

e, dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/4)^{n+1}}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

Infine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)}$$

Pertanto

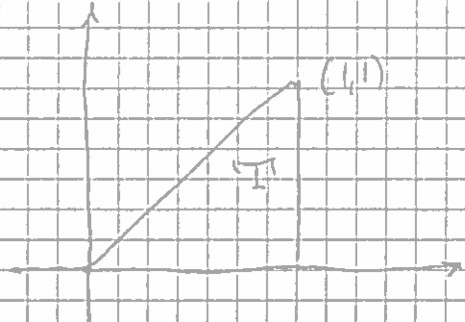
$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!}\, x^8 = \frac{1}{4^4 \cdot 4}\, x^8$$

e concludiamo che

$$f^{(8)}(0) = \frac{8!}{4^5} = \frac{315}{8}$$

---

(14) $z = x^2 + y^2$ $\qquad T: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$



$$\int_{\Sigma} \frac{\ln(1+x+y)}{\sqrt{1+4z}}\, d\sigma_2 =$$

$$= \int_T \frac{\ln(1+x+y)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \ln(1+x+y)\, dy = \int_0^1 \left\{ \Big[(1+x+y)\ln(1+x+y)\Big]_0^x - \int_0^x dy \right\} dx = \int_0^1 \Big[(1+2x)\ln(1+2x) - (1+x)\ln(1+x) - x\Big] dx$$

$$= \left[\frac{(1+2x)^2}{4}\ln(1+2x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+2x)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\,2}\, \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+2x}}\, dx$$

$$-\left[\frac{(1+x)^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1+x)^2}{2}\,\frac{1}{1+x}\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{9}{4}\ln 3 - \cancel{\frac{1}{4}\ln 1} - \left[\frac{(1+2x)^2}{8}\right]_0^1 - \frac{4}{2}\ln 2 + \cancel{\frac{1}{2}\ln 1}$$

$$+ \left[\frac{(1+x)^2}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{4}\ln 3 - 2\ln 2 \cancel{- \frac{9}{8}} \cancel{+ \frac{1}{8}} \cancel{+ 1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{4}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

B1

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y), y, g(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y), y, g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y), y, g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}$$

B2

$$\operatorname{int}\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x > y^2\} \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0,\ x>0\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = y^2\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0,\ x>0\}$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$$

B3 Per studiare la continuità, passiamo in coordinate polari.

Abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = \lim_{\rho\to 0} \rho^{1+\alpha}\frac{(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^{1+\alpha}}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-1}(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^{1+\alpha}$$

e tale limite risulta $0 = f(0,0)$ se $\boxed{\alpha > 1}$

Passiamo al calcolo delle derivate prime

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{1+\alpha}}{h} \frac{1}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} |h|^{\alpha-2}$$

Questo limite esiste ed è finito, purché $\alpha > 2$.
In tal caso è

$$f_x(0,0) = 0$$

Analogamente, se $\alpha > 2$ $f_y(0,0) = 0$.

Verifichiamo la condizione di differenziabilità con $\alpha > 2$.
Dobbiamo controllare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h,k) \rangle}{|(h,k)|} = 0$$

Abbiamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(|h|+|k|)^{1+\alpha}}{(h^2+k^2)^{1+1/2}} = 0$$

In coordinate polari, otteniamo

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{1+\alpha}(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^{1+\alpha}}{\rho^3} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-2} (|\cos\theta| + |\sin\theta|)^{1+\alpha} = 0$$

perché $\alpha > 2$.

Quindi f è differenziabile in $(0,0)$ se $\boxed{\alpha > 2}$