① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)!\,\ln(2+n)}$

Calcoliamo $\displaystyle L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)!\,\ln(3+n)} \cdot (n+1)!\,\ln(2+n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

Pertanto $R = +\infty$ e la serie converge ovunque.

Sappiamo inoltre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)!\,\ln(2+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$$

Pertanto

$$\frac{f^{(10)}(3)}{10!} = \frac{1}{11!\,\ln 12}$$

$$f^{(10)}(3) = \frac{1}{11 \ln 12}$$

---

② Per il Teorema della divergenza

$$\int_{\partial E} \langle \underline{F}, \underline{n}_\nu \rangle \, d\sigma_2 = \int_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_E (x^2+y^2+4)\,dx\,dy\,dz$$

Osserviamo che

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4-z^2, \ -2 \leq z \leq 2 \}$$

Pertanto

$$\int_E (x^2+y^2+4)\,dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2} dz \int_{x^2+y^2 \leq 4-z^2} (x^2+y^2+4)\,dx\,dy$$

Passando in coordinate polari

$$x^2+y^2 \leq 4-z^2 \implies \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2} \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases}$$

Pertanto, otteniamo

$$\int_{-2}^{2} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (\rho^2+4)\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^2 \left[\frac{\rho^4}{4} + 2\rho^2 \right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz$$

$$= 4\pi \int_0^2 \frac{1}{4}(16+z^4-8z^2) + 2(4-z^2)\,dz$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{4}\left(16z + \frac{z^5}{5} - \frac{8z^3}{3}\right) + 2\left(4z - \frac{z^3}{3}\right) \right]_0^2$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{4}\left(32+\frac{32}{5}-\frac{64}{3}\right)+2\left(8-\frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{4}\;\frac{480+96-320}{15}+\frac{2}{3}\cdot 16\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{4}\;\frac{256}{15}+\frac{32}{3}\right] = 4\pi\left(\frac{64}{15}+\frac{32}{3}\right) = \frac{4\pi}{15}(64+160) = \frac{896\pi}{15}$$

---

(3) $$\int_\Gamma \sqrt{z}\,d\sigma_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\,t\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} t\sqrt{(2\cos t-2t\sin t)^2+(2\sin t+2t\cos t)^2+(6t)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} t\sqrt{4+4t^2+36t^2}\,dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} t\sqrt{4+40t^2}\,dt$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} t\sqrt{1+10t^2}\,dt = \left(\begin{array}{ll} 1+10t^2 & = s^2 \\ 10\cdot 2t\,dt = & 2s\,ds \\ t=0 & s=1 \\ t=2\pi & s=\sqrt{1+40\pi^2} \end{array}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{10}\int_1^{\sqrt{1+40\pi^2}} s^2\,ds = \frac{2\sqrt{3}}{30}\left[s^3\right]_1^{\sqrt{1+40\pi^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{30}\left[(1+40\pi^2)^{3/2}-1\right]$$

④ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f = y^2 \ln(1+4x^2)$

f è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$

CN $\quad \nabla f = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{8x}{1+4x^2}\, y^2 = 0 \\ 2y \ln(1+4x^2) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{8}{1+4x^2}\, x y^2 = 0 \\ 2y \ln(1+4x^2) = 0 \end{cases}$$

Otteniamo: 4 sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \ln(1+4x^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \ln(1+4x^2) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$P_h\,(0,h) \qquad h \in \mathbb{R}$$
$$Q_k\,(k,0) \qquad k \in \mathbb{R}$$

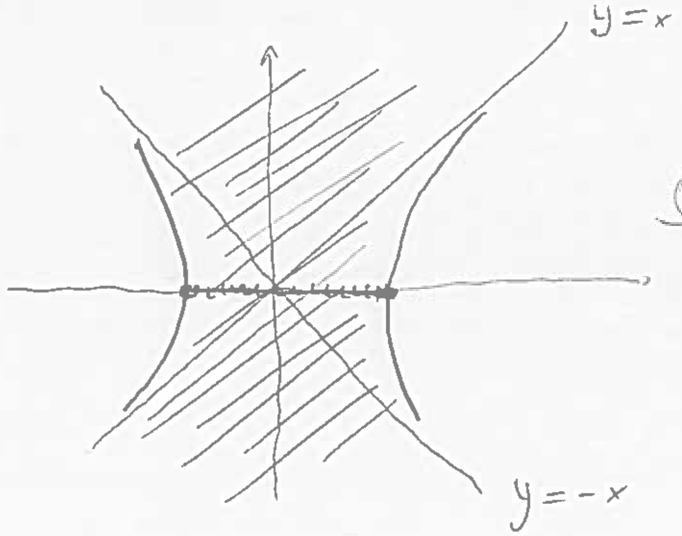
Anziché calcolare la matrice hessiana, possiamo osservare che

a) $f \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) $f(0,h) = f(k,0) = 0$

Pertanto tutti i punti P_h e Q_k sono punti di minimo relativo. In effetti, sono anche punti di minimo assoluto.

B1) Disegniamo l'insieme



Ω è dato dalla regione tratteggiata in figura

Pertanto

$$\text{Int}\,\Omega = \{x^2-y^2<1,\ y>0\} \cup \{x^2-y^2<1,\ y<0\}$$

$$\partial\Omega = \{x^2-y^2=1\} \cup \{y=0,\ -1\le x\le 1\}$$

$$\overline{\Omega} = \{x^2-y^2\le 1\}$$

B3) $\frac{\partial}{\partial u} f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)) \frac{\partial g_1}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)) \frac{\partial g_2}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)) \frac{\partial g_3}{\partial u}$$

B4) $f = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Verifichiamo la eventuale continuità in (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\,(\cos\theta+\sin\theta)^3 = 0$$

Quindi f <u>è continua</u> in (0,0)

Passiamo alle derivate parziali

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$f_y(0,0) = 1$ perché f è pari nello scambio di x con y

Concludiamo con lo studio della differenziabilità.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{(h+k)^3}{h^2+k^2} - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{h^3} + \cancel{k^3} + 3h^2k + 3hk^2 - \cancel{h^3} - hk^2 - h^2k - \cancel{k^3}}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2h^2k + 2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \text{(passando in coordinate polari)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\left(\cos^2\theta \sin\theta + \cos\theta \sin^2\theta\right)}{\rho^3}$$

e il limite non è zero. Quindi f <u>non</u> è differenziabile in $(0,0)$.