(A1) $f = (x^2+y^2-4x)(x-1)^2 \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Applichiamo la CN

$$\nabla f = 0 \qquad \begin{cases} (2x-4)(x-1)^2 + 2(x-1)(x^2+y^2-4x) = 0 \\ 2y(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)\left[(x-2)(x-1) + x^2+y^2-4x\right] = 0 \\ 2y(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)(2x^2-7x+2+y^2) = 0 \\ 2y(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo i quattro sistemi

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1=0 \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2-7x+2+y^2=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2-7x+2+y^2=0 \\ (x-1)^2=0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$P_h(1,h), \quad h \in \mathbb{R}$

e

$$\begin{cases} 2x^2-7x+2=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$A\left(\frac{7-\sqrt{33}}{4}, 0\right), \quad B\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4}, 0\right) \qquad P_h(1,h)$$

Passiamo alla CS

$$f_{xx} = 2(2x^2-7x+2+y^2) + 2(x-1)(4x-7)$$
$$f_{yy} = 2(x-1)^2$$
$$f_{xy} = 4y(x-1)$$

$$H_f\left(\frac{7-\sqrt{33}}{4}, 0\right) = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{7-\sqrt{33}}{4}-1\right)(-\sqrt{33}) & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{7-\sqrt{33}}{4}-1\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{33}}{2}(-\sqrt{33}) & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$H_f > 0$ e A è punto di minimo

$$H_f\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4}, 0\right) = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4} - 1\right)\sqrt{33} & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4} - 1\right)^2 \end{bmatrix}$$

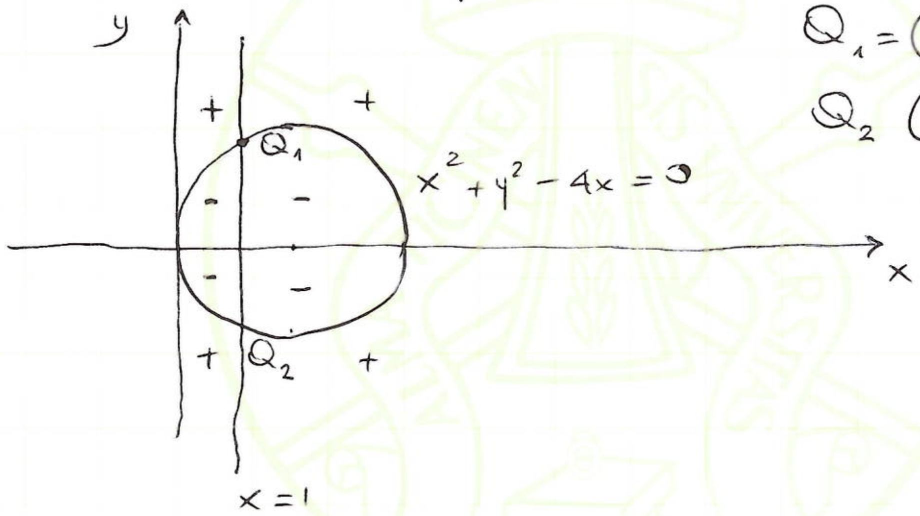
$H_f > 0$ e B è punto di minimo

$$H_f(1,h) = \begin{bmatrix} 2(h^2-3) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La CS non permette di concludere nulla.

Osserviamo che $f(1,h) = 0$.

Studiamo il segno di f



$Q_1 = (1, \sqrt{3})$

$Q_2 \; (1, -\sqrt{3})$

Se consideriamo $P_h(1,h)$ con $h \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ osserviamo che in un intorno di tale punto $f \le 0$ e $f(1,h) = 0$. Pertanto tutti tali punti sono punti di massimo

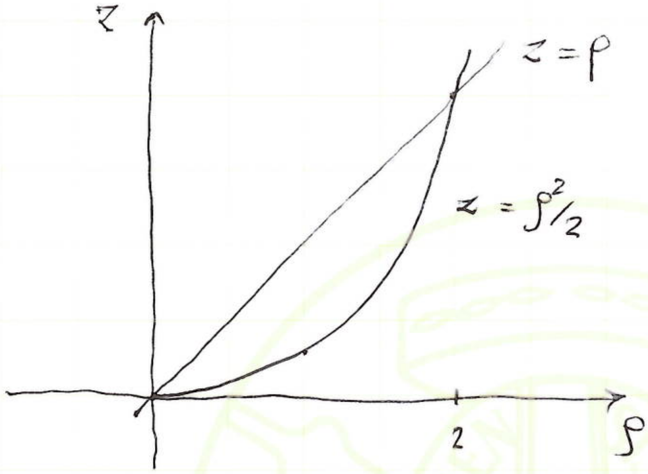
Se consideriamo $P_h(1,h)$ con $h > \sqrt{3}$ oppure $h < -\sqrt{3}$, osserviamo che in un intorno di tale punto $f \ge 0$ e $f(1,h) = 0$. Pertanto tutti tali punti sono punti di minimo

Infine $Q_1(1,\sqrt{3})$ e $Q_2(1,-\sqrt{3})$ sono punti di colle

(A2) $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \dfrac{x^2+y^2}{2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \right\}$

Se poniamo $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ osserviamo che

$\rho^2/2 \le z < \rho$ e la situazione è come in figura



E' evidente che

$0 \le \rho \le 2$

Lo stesso risultato si ottiene osservando che deve essere

$$\frac{x^2+y^2}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \qquad \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \qquad x^2+y^2 \le 4$$

Per calcolare la misura di E, abbiamo

$$m(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_{\{x^2+y^2 \le 4\}} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2 \le 4\}} \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{2} \right) dx\,dy \qquad \left(\text{Passando in coordinate polari} \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(\rho - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^2 \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{2} \right) d\rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{8} \right]_0^2 = 2\pi \left[\frac{8}{3} - \frac{16}{8} \right] = 2\pi \left[\frac{8}{3} - 2 \right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

Si può integrare anche per strati, anziché per fili. In tal caso

$$m(E) = \int_0^2 \left(\int_{A(z)} dx\,dy \right) dz$$

$$= \pi \int_0^2 (2z - z^2)\,dz = \pi \left[z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}$$

(A3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+2}}{3^{2n+1}(2n+1)!} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{3}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \right](x-3)$$

$$= (x-3)\,\mathrm{Sh}\left(\frac{x-3}{3}\right)$$ utilizzando gli sviluppi noti.

Sempre ricorrendo agli sviluppi noti, è immediato osservare che $R = +\infty$.

Infine, dalla teoria degli sviluppi di Taylor, abbiamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$$

Per avere la derivata dodicesima, è necessario che

$$2n+2 = 12 \implies n = 5$$

Pertanto

$$\frac{f^{(12)}(3)}{12!}(x-3)^{12} = \frac{1}{3^{11} \cdot 11!}(x-3)^{12}$$

da cui ricaviamo

$$f^{(12)}(3) = \frac{12}{3^{11}} = \frac{4}{3^{10}}$$

(A4) Osserviamo che F è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$: infatti è il quoziente di due polinomi, il cui denominatore è sempre diverso da zero

$$4x^2+9y^2-4x+2 = (4x^2-4x+1)+9y^2+1$$
$$= (2x-1)^2+9y^2+1.$$

Osserviamo, inoltre che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{18y(8x-4)}{(4x^2+9y^2-4x+2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{18y(8x-4)}{(4x^2+9y^2-4x+2)^2}$$

Poiché $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ e $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, concludiamo che F è conservativo. Per calcolare il lavoro, basta determinare un potenziale U e poi valutare la differenza fra il potenziale nel punto finale e il potenziale nel punto iniziale.

Se scegliamo $(x_0, y_0) = (0,0)$ abbiamo

$$U = \int_0^x F_1(t,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{8t-4}{4t^2-4t+2}\,dt + \int_0^y \frac{18t}{9t^2+4x^2-4x+2}\,dt + U(0,0)$$

$$= \left[\ln(4t^2-4t+2)\right]_0^x + \left[\ln(9t^2+4x^2-4x+2)\right]_0^y + U(0,0)$$

$$= \cancel{\ln(4x^2-4x+2)} - \ln 2 + \ln(4x^2-4x+9y^2+2)$$
$$- \cancel{\ln(4x^2-4x+2)} + U(0,0)$$

$= \ln(4x^2 - 4x + 9y^2 + 2) - \ln 2 + U(0,0)$

Scegliendo per comodità $U(0,0) = \ln 2$, otteniamo

$$L = U(2,2) - U(1,1) = \ln(4x^2 - 4x + 9y^2 + 2)\Big|_{(2,2)} +$$

$$- \ln(4x^2 - 4x + 9y^2 + 2)\Big|_{(1,1)} = \ln(16 - 8 + 36 + 2) - \ln(9+2)$$

$$= \ln(46) - \ln 11 = \ln \frac{46}{11}$$

$\boxed{B1}$ Affinché f sia continua in $(0,0)$, occorre che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \quad \text{ossia} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Se passiamo in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^\alpha (\cos\theta)^\alpha \sin(\rho\sin\theta)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\alpha+1}(\cos\theta)^\alpha \sin\theta}{\rho^2}$$

e il limite è nullo se $\alpha + 1 - 2 > 0 \implies \boxed{\alpha > 1}$

Osserviamo peraltro che x^α va in effetti corretto in $|x|^\alpha$, perché è mal definito in generale per valori negativi di x.

Inoltre $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0) - f(0,0)}{k} = 0$$

Pertanto affinché f sia differenziabile in $(0,0)$ occorre che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0, \quad \text{ossia}$$

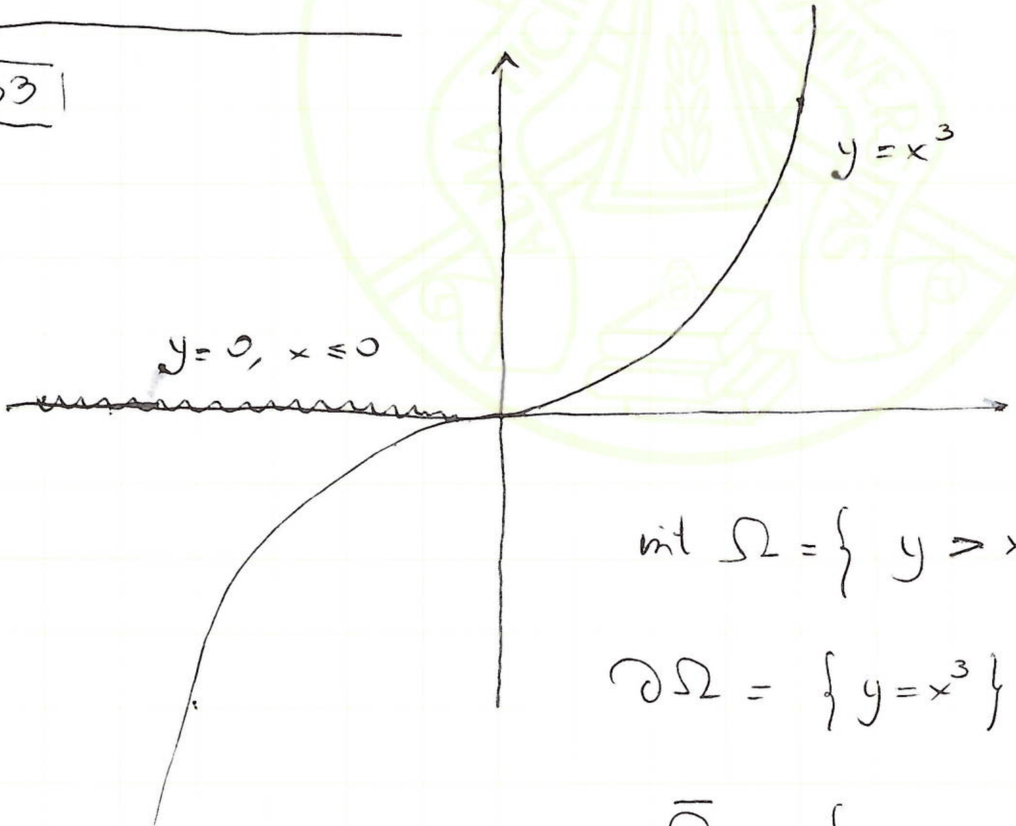
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^\alpha \sin k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$$

Passando in coordinate polari (con la medesima osservazione di prima su h^α) abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^\alpha |\cos\theta|^\alpha \sin(\rho\sin\theta)}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\alpha+1}|\cos\theta|^\alpha \sin\theta}{\rho^3}$$

e il limite è nullo se $\alpha+1-3>0 \implies \boxed{\alpha>2}$

$\boxed{B3}$



$$\text{int}\,\Omega = \{y>x^3\} \setminus \{y=0,\ x\le 0\}$$

$$\partial\Omega = \{y=x^3\} \cup \{y=0,\ x\le 0\}$$

$$\overline{\Omega} = \{y\ge x^3\}$$

$\boxed{B4}$ $f = f(x,y,z)$ $\qquad g = g(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, g(x,y), g(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x,y), g(x,y)) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x,y), g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(x, g(x,y), g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}$$